Глава III. Векторная алгебра

§ 10. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Материал этого параграфа в основном известен из школьного курса математики. Тем не менее, он необходим для систематического изложения нашего курса. К тому же, есть и существенные отличия от изложения этого материала в школе. Основное из них состоит в определении понятия вектора.

Определение

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позднее.

Определения

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Коллинеарные направленные отрезки называются *сонаправленными*, если они направлены в одну и ту же сторону, и *антинаправленными* или *противонаправленными* в противоположном случае. Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и антинаправленным любому направленному отрезку. Коллинеарность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обозначается через $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, их сонаправленность — через $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, а антинаправленность — через $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Понятие вектора (1)

Введем на множестве всех направленных отрезков бинарное отношение α следующим образом: $\overrightarrow{AB}\,\alpha\,\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB}\upuparrows\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Очевидно, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Определение

Вектором называется элемент фактор-множества множества всех направленных отрезков по только что определенному отношению эквивалентности α.

- Иными словами вектор — это множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление.

Определение

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

Определение

Длиной (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

Определение

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т. е. состоят из одних и тех же направленных отрезков.

Допуская вольность речи, говорят, что

- *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A. Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A*.

Определение

Два вектора называются *коллинеарными* [*сонаправленными*, *антинаправленными*], если их изображения коллинеарны [сонаправленны, антинаправленны]. Антинаправленные векторы называют также *противонаправленными*.

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определения

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и антинаправлен с любым другим вектором.

Определение

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку O, отложим от нее вектор $\vec{a}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через A. От точки A отложим вектор $\vec{b}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через B. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} + \vec{b}$.

Замечание об определении суммы векторов

Определение суммы векторов корректно, т. е. не зависит от выбора начальной точки O.

Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (см. рис. 1 на следующем слайде). Следовательно, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ — изображения одного и того же вектора.

Рис. 1. Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки O. Концы полученных направленных отрезков обозначим через A и B соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами OA и OB — через M. Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$, будет равен $\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 2, на котором слева вектор $\vec{a}+\vec{b}$ построен по определению, а справа — описанным только что способом). Заметим, однако, что этот способ построения суммы вектора применим только к неколлинеарным векторам.

Рис. 2. Два способа определения суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства суммы векторов

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, то:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*сложение векторов* ***коммутативно***);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*сложение векторов* ***ассоциативно***);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Таким образом, множество всех векторов с операцией их сложения является абелевой группой. Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, а вектором, обратным к $\vec{a}$ — вектор $-\vec{a}$. $\square$

Как и в любой группе с аддитивной записью операции, в группе векторов по сложению можно определить *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ правилом: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$, а если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами*.

Из определения операции умножения вектора на число с очевидностью вытекает, что $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства произведения вектора на число

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа, то:

1) $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов*);
2) $(t+s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. $\square$

Определение

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем замечании указано, как это можно сделать.

Замечание об орте вектора

Если $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что векторы $\vec{a}$ и $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ сонаправленны. Вновь используя определение произведения вектора на число, имеем

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. □

Определение

Переход от ненулевого вектора к его орту называется *нормированием* вектора.

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Критерий коллинеарности векторов

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

Доказательство. Достаточность непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

Необходимость. По условию $|\vec{b}| \neq 0$. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, получаем, что либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае векторы $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправленны. Кроме того,

$$|t\vec{b}| = |t| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$.

Критерий коллинеарности векторов легко переформулировать так, чтобы в его посылке не было никаких ограничений на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Критерий коллинеарности векторов (альтернативная формулировка)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число t такое, что либо $\vec{a} = t\vec{b}$, либо $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличен от $\vec{0}$, то достаточно сослаться на критерий коллинеарности векторов в его стандартной формулировке. Если же $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то для любого t выполнены оба равенства $\vec{a} = t\vec{b}$ и $\vec{b} = t\vec{a}$. $\square$

Альтернативная формулировка критерия коллинеарности векторов оказывается неудобной для применения. Поэтому в дальнейшем мы, не оговаривая этого в явном виде, практически всегда будем ссылаться на ту формулировку этого критерия, которая дана на предыдущем слайде.

Определение

Базисом плоскости называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, получаем простое, но принципиально важное

Замечание о нулевом векторе и базисе плоскости

Нулевой вектор не может входить в базис плоскости. $\square$

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса на плоскости, является следующая

Теорема о разложении вектора по базису на плоскости

Пусть $(\vec{a}, \vec{b})$ *— базис некоторой плоскости, а* $\vec{x}$ *— вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1 *и* t_2 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b})$. Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ координаты t_1, t_2, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B и M соответственно (см. рис. 3 на следующем слайде). Спроектируем точку M на прямую OA параллельно прямой OB и на прямую OB параллельно прямой OA. Обозначим полученные точки через A' и B' соответственно и положим $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}' = \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и базисе плоскости), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{a}' = t_1\vec{a}$ и $\vec{b}' = t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Тогда $\vec{x} = \vec{a}' + \vec{b}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$.

Существование чисел t_1 и t_2 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$ для некоторых чисел s_1 и s_2. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (1), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b}$. Но тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по критерию коллинеарности векторов, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. □

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (рисунок)

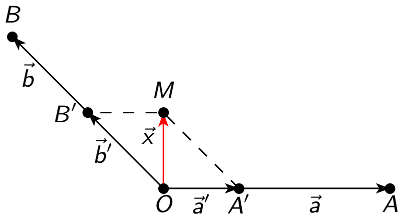

Рис. 3. Разложение вектора по базису на плоскости

Определение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

- Отношение компланарности является тернарным отношением на множестве всех векторов. Это один из немногих примеров тернарных отношений в нашем курсе.

Определение

Базисом пространства называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ясно, что если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — нулевой, то эти векторы компланарны. Следовательно, справедливо следующее замечание, аналогичное замечанию о нулевом векторе и базисе плоскости.

Замечание о нулевом векторе и базисе пространства

Нулевой вектор не может входить в базис пространства. □

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса в пространстве, является следующая теорема, аналогичная теореме о разложении вектора по базису на плоскости.

Теорема о разложении вектора по базису в пространстве

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *— базис пространства, а* $\vec{x}$ *— произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1, t_2 *и* t_3 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующих двух слайдах.

Определение

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты t_1, t_2, t_3, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B, C и M соответственно (см. рис. 4 на следующем слайде). Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны (в противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были бы компланарными и не образовывали бы базиса пространства), существует единственная плоскость π, проходящая через точки O, A и B. Спроектируем точку M на плоскость π параллельно прямой OC и на прямую OC параллельно плоскости π. Обозначим полученные точки через M' и C' соответственно и положим $\vec{x}' = \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}' = \overrightarrow{OC'}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{x}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Далее, ясно, что $\vec{c}' \parallel \vec{c}$. Поскольку $\vec{c} \neq \vec{0}$ (см. замечание о нулевом векторе и базисе пространства), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{c}' = t_3\vec{c}$ для некоторого числа t_3. Тогда $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{c}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Существование чисел t_1, t_2 и t_3 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых чисел s_1, s_2 и s_3. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (2), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. $\square$

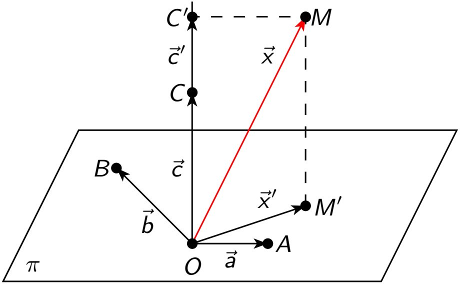

Рис. 4. Разложение вектора по базису в пространстве

Координаты суммы векторов и произведения вектора на число

Замечание о координатах векторов $\vec{x}+\vec{y}$ и $t\vec{x}$

Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ координаты (x_1,x_2,x_3) и (y_1,y_3,y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x}+\vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1,tx_2,tx_3). Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.

Доказательство. По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$ и $\vec{y}=y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y}&=(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})+(y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c})=\\&=(x_1+y_1)\vec{a}+(x_2+y_2)\vec{b}+(x_3+y_3)\vec{c},\\t\vec{x}&=t(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})=(tx_1)\vec{a}+(tx_2)\vec{b}+(tx_3)\vec{c}.\end{aligned}$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве. В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. $\square$