Глава VII. Матрицы

§ 25. Умножение матриц. Матрицы и многочлены

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Этот параграф посвящен, главным образом, операции умножения матриц, которая будет введена на следующем слайде. Но сначала напомним о тех операциях над матрицами, которые уже рассматривались ранее.

В § 21 были введены линейные операции над матрицами (сложение матриц и умножение матрицы на скаляр). Свойства этих операций по существу совпадают с аксиомами векторного пространства, и потому мы не будем перечислять их в явном виде.

В § 8 была определена операция транспонирования матрицы. Укажем ее свойства.

Свойства транспонирования матрицы

Пусть A и B — матрицы одного и того же размера над (одним и тем же) кольцом R, а $t \in R$. Тогда:

1) $(A^\top)^\top = A$;
2) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
3) $(tA)^\top = tA^\top$. $\square$

Мы не будем доказывать эти свойства, поскольку они непосредственно вытекают из определения операций.

!! *Произведение двух матриц над одним и тем же кольцом определено лишь в случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.*

Иными словами, если A и B — матрицы над кольцом R, A имеет размер $k \times \ell$, а B — размер $r \times m$, то произведение AB существует тогда и только тогда, когда $\ell = r$.

Определение

Пусть $A = (a_{ij}) \in R^{k\times\ell}$, а $B = (b_{ij}) \in R^{\ell\times m}$. Тогда *произведением* AB матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij}) \in R^{k\times m}$ такая, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\ell}b_{\ell j}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, c_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Для краткости правило вычисления элементов произведения матриц часто формулируют так:

- *элемент c_{ij} равен произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.*

Свойства произведения матриц

Пусть A, B и C — матрицы над одним и тем жем же кольцом R, а $t \in R$. Тогда:

1) *если произведения матриц AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (умножение матриц ассоциативно);*
2) *если A и B — матрицы одного и того же размера и произведение матриц AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (умножение матриц дистрибутивно справа относительно сложения);*
3) *если B и C — матрицы одного и того же размера и произведение матриц AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (умножение матриц дистрибутивно слева относительно сложения);*
4) *если произведение матриц AB определено, то $(tA)B = A(tB) = t(AB)$;*
5) *если E — единичная матрица и произведение AE [соответственно EA] определено, то $AE = A$ [соответственно $EA = A$];*
6) *если O — нулевая матрица такая, что произведение AO [соответственно OA] определено, то $AO = O$ [соответственно $OA = O$];*
7) *если произведение матриц AB определено, то $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Доказательство. Свойства 2)–7) проверяются простыми вычислениями, основанными на определениях операций над матрицами. Докажем свойство 1). Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$, причем $A \in R^{m \times n}$ для некоторых m и n. Из существования матриц AB и BC вытекает, что $B \in R^{n \times r}$ и $C \in R^{r \times s}$ для некоторых r и s. Положим $AB = D = (d_{ij})$ и $BC = F = (f_{ij})$. Ясно, что $D \in R^{m \times r}$ и $F \in R^{n \times s}$. Отсюда вытекает, что матрицы $(AB)C$ и $A(BC)$ существуют и лежат в $R^{m \times s}$. Положим $(AB)C = (g_{ij})$ и $A(BC) = (h_{ij})$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{s} d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{s} \left[\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) \cdot c_{kj} \right] = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} \left[a_{i\ell} \cdot \left(\sum_{k=1}^{s} b_{\ell k} c_{kj} \right) \right] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} f_{\ell j} = h_{ij}.$$

Свойство 1) доказано. □

Очевидно, что если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка над кольцом R, то матрица AB существует и является квадратной матрицей того же порядка над R. Свойства сложения и умножения матриц показывают, что справедливо следующее утверждение.

Замечание о кольце матриц

Пусть R — кольцо, а n — натуральное число.

1) *Множество $R^{n\times n}$ с операцией умножения матриц является моноидом. Нейтральным элементом этого моноида является единичная матрица порядка n.*
2) *Множество $R^{n\times n}$ с операциями сложения и умножения матриц является ассоциативным кольцом с 1.* $\square$

Некоммутативность произведения матриц

Укажем теперь одно свойство, которым произведение матриц не обладает:

- *произведение матриц не коммутативно.*

В самом деле, может оказаться, что произведение матриц A и B в одном порядке существует, а в другом — нет. Например, если $A \in R^{3\times 5}$, а $B \in R^{5\times 4}$, то матрица AB существует (и имеет размер 3×4), а матрицы BA не существует. Далее, матрицы AB и BA могут существовать, но иметь разные размеры. Например, если $A \in R^{3\times 5}$, а $B \in R^{5\times 3}$, то матрицы AB и BA существуют и являются квадратными, но первая из них имеет порядок 3, а вторая — порядок 5.

Замечание о произведениях матриц в разном порядке

Если произведения AB и BA существуют и имеют одинаковые размеры, то A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка.

Доказательство. Пусть $A \in R^{m\times n}$, а $B \in R^{r\times s}$. Из существования произведения AB вытекает, что $n = r$, а из существования произведения BA — что $m = s$. Но тогда $AB \in R^{m\times m}$, а $BA \in R^{n\times n}$. Поскольку размеры матриц AB и BA совпадают, получаем, что $m = n$. Таким образом, A и B — квадратные матрицы порядка n. $\square$

Но и в случае, когда A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, равенство $AB = BA$ может не выполняться, в чем легко убедиться на конкретных примерах.

В любом поле F выполнено следующее свойство, называемое *законом сокращения*: если $x, y, z \in F$, $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (чтобы убедиться в этом, надо умножить обе части равенства справа на z^{-1}). В кольце матриц это свойство не выполняется. Но справедлив следующий его ослабленный аналог.

Ослабленный закон сокращения для матриц

Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n над полем F. Если для любой матрицы X размера $n \times 1$ над F выполнено равенство $AX = BX$, то $A = B$. Аналогичное заключение верно, если для любой матрицы Y порядка $1 \times n$ над F выполнено равенство $YA = YB$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ обозначим через A_i и B_i i-е столбцы матриц A и B соответственно, а через X_i — матрицу размера $n \times 1$, в которой i-й элемент равен 1, а все остальные элементы равны 0. Ясно, что $AX_i = A_i$ и $BX_i = B_i$. Учитывая, что $AX_i = BX_i$, получаем, что i-е столбцы матриц A и B совпадают. Поскольку это выполняется для любого $i = 1, 2, \dots, n$, получаем, что $A = B$. Второе утверждение доказывается аналогично (надо только рассматривать не столбцы, а строки матриц A и B). $\square$

Отметим, что мы уже сталкивались со свойством такого типа при изучении скалярного произведения векторов (см. §11).

Наша следующая цель — доказать, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Чтобы сделать это, нам потребуется рассмотреть один специальный вид матриц.

Определение

Квадратная матрица L порядка n называется *полураспавшейся*, если существуют квадратные матрицы A и B порядков p и q соответственно такие, что либо

$$L = \begin{pmatrix} A & N \\ O & B \end{pmatrix} \tag{1}$$

для нулевой матрицы O размера $q \times p$ и некоторой матрицы N размера $p \times q$, либо

$$L = \begin{pmatrix} A & O \\ N & B \end{pmatrix} \tag{2}$$

для нулевой матрицы O размера $p \times q$ и некоторой матрицы N размера $q \times p$. Матрицы A и B называются *диагональными блоками* полураспавшейся матрицы L.

Предложение об определителе полураспавшейся матрицы

Если L — полураспавшаяся матрица с диагональными блоками A и B, то $|L| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица L имеет вид (1). В самом деле, если L имеет вид (2), то $L^\top$ — полураспавшаяся матрица вида (1) с диагональными блоками $A^\top$ и $B^\top$. Поэтому если для матриц вида (1) предложение уже доказано, то, используя 1-е свойство определителей (см. § 8), имеем $|L| = |L^\top| = |A^\top| \cdot |B^\top| = |A| \cdot |B|$. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $N = (n_{ij})$. Дальнейшие рассуждения проведем индукцией по p.

База индукции. Если $p = 1$, то $A = (a_{11})$ и

$$|L| = \begin{vmatrix} a_{11} & n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1q} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель из правой части этого равенства по первому столбцу, получим, что $|L| = a_{11} \cdot |B| = |A| \cdot |B|$.

Шаг индукции. Пусть $p > 1$. Минор матрицы A, соответствующий элементу a_{ij}, будем обозначать через M_{ij}. Разложив определитель матрицы L по первому столбцу и использовав предположение индукции, получим:

$$|L| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2p} & n_{21} & \ldots & n_{2q} \\ a_{32} & \ldots & a_{3p} & n_{31} & \ldots & n_{3q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p2} & \ldots & a_{pp} & n_{r1} & \ldots & n_{rq} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{q1} & \ldots & b_{qq} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1p} & n_{11} & \ldots & n_{1q} \\ a_{32} & \ldots & a_{3p} & n_{31} & \ldots & n_{3q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p2} & \ldots & a_{pp} & n_{r1} & \ldots & n_{pq} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{q1} & \ldots & b_{qq} \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{p+1} a_{p1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1p} & n_{11} & \ldots & n_{1q} \\ a_{22} & \ldots & a_{2p} & n_{21} & \ldots & n_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1\,2} & \ldots & a_{p-1\,p} & n_{p-1\,1} & \ldots & n_{p-1\,q} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{q1} & \ldots & b_{qq} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} M_{11} \cdot |B| - a_{21} M_{21} \cdot |B| + \cdots + (-1)^{p+1} a_{p1} M_{p1} \cdot |B| =$$

$$= a_{11} A_{11} \cdot |B| + a_{21} A_{21} \cdot |B| + \cdots + a_{p1} A_{p1} \cdot |B| =$$

$$= (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \cdots + a_{p1} A_{p1}) \cdot |B| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема об определителе произведения матриц

Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — квадратные матрицы одного и того же порядка, то $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство. Обозначим порядок матриц A и B через n, а матрицу AB — через C. Пусть $C = (c_{ij})$. Рассмотрим следующую полураспавшуюся матрицу с диагональными блоками A и B:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу предложения об определителе полураспавшейся матрицы

$$|D| = |A| \cdot |B|. \tag{3}$$

Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ прибавим к $(n + j)$-му столбцу матрицы D ее первый столбец, умноженный на b_{1j}, второй, умноженный на b_{2j}, …, и, наконец, n-й, умноженный на b_{nj}. Полученную матрицу обозначим через D'. Ясно, что первые n столбцов матрицы D' совпадают с соответствующими столбцами матрицы D. Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ элемент, стоящий в i-й строке и $(n + j)$-м столбце матрицы D', равен $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$, если $1 \leqslant i \leqslant n$, и $-b_{ij} + b_{ij} = 0$, если $n + 1 \leqslant i \leqslant 2n$. Таким образом, матрица D' имеет следующий вид:

$$D' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом 7-го свойства определителей и принципа равноправия строк и столбцов (см. § 8), получаем, что

$$|D'| = |D|. \tag{4}$$

Поменяем в матрице D' местами сначала $(n+1)$-й столбец с первым, затем $(n+2)$-й столбец — со вторым, ..., наконец, последний столбец — с n-м. В результате мы получим матрицу

$$D'' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя от матрицы D' к матрице D'', мы сделали n перестановок столбцов. Применяя 4-е свойство определителей и принцип равноправия строк и столбцов (см. § 8), имеем

$$|D''| = (-1)^n \cdot |D'|. \tag{5}$$

Матрица D'' является полураспавшейся матрицей с диагональными блоками C и $-E$. Предложение об определителе треугольной матрицы (см. § 8) и предложение об определителе полураспавшейся матрицы показывают, что $|D''| = |C| \cdot (-1)^n$. Умножая обе части этого равенства на $(-1)^n$, имеем $(-1)^n \cdot |D''| = (-1)^{2n} \cdot |C| = |C|$, т. е.

$$|C| = (-1)^n \cdot |D''|. \qquad (6)$$

Из равенств (3)–(6) вытекает, что

$$|C| = (-1)^n \cdot |D''| = (-1)^{2n} \cdot |D'| = |D'| = |D| = |A| \cdot |B|.$$

Теорема доказана. $\square$

Зафиксируем кольцо R и натуральное число n. В силу замечания о кольце матриц множество $R^{n\times n}$ с операциями сложения и умножения матриц является ассоциативным кольцом с 1 (роль единицы играет единичная матрица порядка n). Рассмотрим кольцо $R^{n\times n}[x]$, т. е. кольцо многочленов над кольцом $R^{n\times n}$. Его элементами являются многочлены, коэффициентами которых являются квадратные матрицы порядка n над кольцом R, т. е. выражения вида $A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$, где $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0 \in R^{n\times n}$. Элементы кольца $R^{n\times n}[x]$ можно рассматривать как матрицы над кольцом $R[x]$. Другими словами, $R^{n\times n}[x] = \bigl(R[x]\bigr)^{n\times n}$. Например, в следующем равенстве слева от знака равенства стоит элемент кольца $\mathbb{R}^{2\times 2}[x]$, а справа от него — элемент кольца $\bigl(\mathbb{R}[x]\bigr)^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 5x + 1 & -x^2 + x + 2 \\ 2x^2 - x - 2 & 2x^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка > 1 над полем F. Матрица (A_{ij}), т. е. матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, называется *матрицей, присоединенной к* A, и обозначается через $A^{\vee}$.

Замечание о присоединенной матрице

Если A — произвольная квадратная матрица, то

$$A \cdot (A^{\vee})^{\top} = (A^{\vee})^{\top} \cdot A = |A| \cdot E.$$

Доказательство. Пусть $X = A \cdot (A^{\vee})^{\top}$. Положим $X = (x_{ij})$. Ясно, что $x_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$. В силу формулы (7) из § 8 получаем, что

$$x_{ij} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, $A \cdot (A^{\vee})^{\top} = |A| \cdot E$. Равенство $(A^{\vee})^{\top} \cdot A = |A| \cdot E$ проверяется точно так же. $\square$

Следующее понятие будет играть исключительно важную роль в дальнейшем.

Определение

Пусть A — квадратная матрица над полем F. *Характеристическим многочленом* матрицы A называется многочлен $|A - xE|$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A. Этот многочлен обозначается через $\chi_A(x)$.

Если $A = (a_{ij})$, а порядок A равен n, то

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Ясно, что при вычислении определителя, стоящего в правой части этого равенства, появится лишь одно слагаемое, содержащее x^n, именно, — $(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$. Поэтому старший член многочлена $\chi_A(x)$ имеет вид $(-1)^n x^n$. Кроме того, очевидно, что свободный член этого многочлена есть $\chi_A(0) = |A|$.

Определение

Пусть A — квадратная матрица над полем F. Для всякого целого $n \geqslant 0$ определим по индукции матрицу A^n следующим образом: $A^0 = E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A, а если $n > 0$, то $A^n = A^{n-1} \cdot A$.

Поскольку, как уже отмечалось выше, произведение двух квадратных матриц одного и того же порядка всегда определено и является квадратной матрицей того же порядка, матрица A^n при любом n определена и является квадратной матрицей того же порядка, что и A.

Определение

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ — многочлен над полем F, а A — квадратная матрица над F. *Значением многочлена f от матрицы A* называется матрица $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 E$.

Ясно, что $f(A)$ — квадратная матрица над F того же порядка, что и A.

Определение

Пусть F — поле, $A \in F^{n \times n}$ и $f \in F[x]$. Говорят, что многочлен f *аннулирует* матрицу A, если $f(A) = O$.

Теорема Гамильтона–Кэли

Характеристический многочлен произвольной квадратной матрицы A аннулирует эту матрицу.

Доказательство. Пусть $\chi_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Положим $B(x) = \left((A - xE)^{\vee}\right)^{\top}$. Элементами матрицы $B(x)$ являются алгебраические дополнения к элементам матрицы $A - xE$, т. е., с точностью до знака, миноры $(n-1)$-го порядка этой матрицы. Ясно, что эти миноры суть многочлены степени $\leqslant n-1$. Следовательно, матрицу $B(x)$ можно записать в виде $B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$, где $B_0, B_1, \ldots .B_{n-1} \in F^{n\times n}$. Из замечания о присоединенной матрице вытекает, что $(A - xE)B(x) = |A - xE| \cdot E = \chi_A(x) \cdot E$. Следовательно,

$$(A - xE)(B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0) = a_n x^n E + a_{n-1}x^{n-1}E + \cdots + a_0 E.$$

Раскрывая скобки в левой части этого равенства и приводя подобные, имеем

$$\begin{aligned} &- B_{n-1}x^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (AB_1 - B_0)x + AB_0 = \\ &= a_n x^n E + a_{n-1}x^{n-1}E + \cdots + a_0 E. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, имеем

$$a_nE = -B_{n-1}, a_{n-1}E = AB_{n-1} - B_{n-2}, \ldots, a_1E = AB_1 - B_0, a_0E = AB_0.$$

Умножая слева первое из этих равенств на A^n, второе – на A^{n-1}, ..., предпоследнее — на A, последнее — на E, получим следующий набор равенств:

$$\begin{array}{rcl}
a_nA^n & = & -A^nB_{n-1}, \\
a_{n-1}A^{n-1} & = & A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2}, \\
a_{n-2}A^{n-2} & = & A^{n-1}B_{n-2} - A^{n-2}B_{n-3}, \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
a_1A & = & A^2B_1 - AB_0, \\
a_0E & = & AB_0.
\end{array}$$

Сумма левых частей этих равенств равна

$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E = \chi_A(A),$$

а сумма их правых частей равна O. Следовательно, $\chi_A(A) = O$. □

Используя операцию умножения матриц, можно получить другую, более компактную и удобную запись системы линейных уравнений. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим через A ее основную матрицу и положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (7) равносильна матричному равенству $AX = B$. Это равенство (при условии, что X и B — матрицы, состоящие из одного столбца) называется *матричной записью системы линейных уравнений* (7).

Матричным уравнением называется уравнение, в котором неизвестным является матрица. Здесь мы подробно рассмотрим матричное уравнение вида

$$AX = B, \tag{8}$$

где A и B — известные матрицы, а X — неизвестная. Из определения произведения матриц видно, что число строк в матрице AX равно числу строк в матрице A. Следовательно, если число строк в матрицах A и B различно, то уравнение (8) решений не имеет. Поэтому всюду в дальнейшем, говоря об этом уравнении, мы будем считать, что *матрицы A и B имеют одинаковое число строк*.

Из определения произведения матриц видно также, что число столбцов в матрице AX равно числу столбцов в матрице X. Следовательно, если X — решение уравнения (8), то матрицы X и B содержат одинаковое число столбцов. Как мы видели выше, если матрицы X и B содержат один столбец, то уравнение (8) есть просто другой способ записи системы линейных уравнений. Обозначим через k число столбцов в матрицах X и B. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ обозначим i-й столбец матрицы X через X_i, а i-й столбец матрицы B — через B_i. Из определения произведения матриц вытекает, что i-й столбец матрицы AX равен AX_i.

Поэтому

!! *в общем случае уравнение* (8) *равносильно совокупности* k *систем линейных уравнений вида*

$$AX_1 = B_1, AX_2 = B_2, \dots, AX_k = B_k. \tag{9}$$

Для того чтобы решить каждую из этих систем методом Гаусса, надо записать расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести ее к ступенчатому виду. Если при этом окажется, что хотя бы одна из систем несовместна, то и исходное матричное уравнение не имеет решений. Если же все системы совместны, то, решив каждую из них, мы найдем все столбцы матрицы X, а значит и саму эту матрицу. Но у всех решаемых систем основная матрица одна и та же — матрица A. Это позволяет решать все системы одновременно, действуя по алгоритму, который приведен на следующем слайде.

Алгоритм решения матричного уравнения вида $AX = B$

Пусть дано уравнение (8), в котором A — матрица размера $n \times k$, а B — матрица размера $n \times m$. Запишем матрицу $(A \,|\, B)$, т. е. матрицу размера $n \times (k + m)$, в которой в первых k столбцах стоит матрица A, а в последних m столбцах — матрица B. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые k столбцов) к ступенчатому виду. После этого для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ можно найти i-й столбец матрицы X, решив систему линейных уравнений вида $A'X_i = B'_i$, где A' — левая часть полученной матрицы, а B'_i — i-й столбец правой части полученной матрицы. Если при этом окажется, что хотя бы одна из этих систем несовместна, то уравнение $AX = B$ решений не имеет.

Особый интерес с точки зрения дальнейшего представляет уравнение (8), в котором матрица A является квадратной и невырожденной. В этом случае каждая из систем (9) является крамеровской. В силу теоремы Крамера (см. § 9) все эти системы имеют единственное решение. Следовательно, и уравнение (8) имеет единственное решение. Это позволяет использовать для его решения метод Гаусса–Жордана в том виде, в каком он был изложен в конце § 7. Объединяя приведенный там алгоритм нахождения решения системы, имеющей единственное решение, и алгоритм с предыдущего слайда, получаем изложенный на следующем слайде алгоритм, который будет использован в дальнейшем для решения ряда важных задач.

Алгоритм решения матричного уравнения вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A

Пусть дано уравнение (8), в котором A — невырожденная квадратная матрица порядка n, а B — матрица размера $n \times k$. Запишем матрицу $(A \mid B)$ размера $n \times (n + k)$ и с помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних k столбцах) полученной матрицы будет записана матрица X, являющаяся единственным решением уравнения (8).

Матричное уравнение вида $XA = B$

Все сказанное выше об уравнении (8) можно использовать для того, чтобы решить матричное уравнение вида $XA = B$, где A и B — известные матрицы, а X — неизвестная. Транспонируя обе части равенства $XA = B$ и используя свойство 7) произведения матриц, получаем уравнение $A^\top X^\top = B^\top$, т. е. уравнение вида (8). Решив его одним из двух описанных выше способов, мы найдем матрицу $X^\top$ (естественно, второй способ можно применять лишь в случае, когда A — невырожденная квадратная матрица). Транспонировав матрицу $X^\top$, найдем искомую матрицу X.