§ 28. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

над полем F. Множество всех решений этой системы образует, как мы знаем, подпространство пространства F_n, называемое пространством решений системы (1) (см. § 23). Основной целью данного параграфа является доказательство теоремы о размерности этого пространства. В ходе доказательства будет указан способ построения базиса пространства решений.

Теорема о размерности пространства решений однородной системы

Размерность пространства решений системы (1) равна $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — ранг основной матрицы системы.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится одно вспомогательное утверждение (см. следующий слайд).

Лемма о миноре и строках матрицы

Пусть A — матрица, а M — ее ненулевой минор, являющийся определителем матрицы, расположенной на пересечении строк матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и столбцов матрицы A с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Тогда как строки матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, так и столбцы матрицы A с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$ линейно независимы.

Доказательство. Докажем утверждение леммы, относящееся к строкам, для столбцов доказательство вполне аналогично. Обозначим через B матрицу, определителем которой является минор M. Для удобства обозначений будем считать, что эта матрица расположена в первых r строках матрицы A. Обозначим эти строки через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Предположим, что они линейно зависимы. В силу критерия линейной зависимости (см. § 21) один из них, скажем последний, является линейной комбинацией остальных, т. е. $\mathbf{a}_r = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{r-1}\mathbf{a}_{r-1}$ для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$. Обозначим векторы-строки матрицы B через $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_r$. Ясно, что $\mathbf{a}'_r = t_1\mathbf{a}'_1 + t_2\mathbf{a}'_2 + \cdots + t_{r-1}\mathbf{a}'_{r-1}$.

Ненулевой минор и линейная независимость строк (2)

Умножим первую строку матрицы B на $-t_1$, вторую на $-t_2$, $\ldots$, $(r-1)$-ю на $-t_{r-1}$ и полученные произведения прибавим к r-й строке. В силу 7-го свойства определителей (см. § 8) определитель полученной матрицы равен M. С другой стороны, эта матрица будет содержать нулевую строку, и, в силу 3-го свойства определителей (см. тот же параграф) ее определитель равен 0. Но это противоречт тому, что минор M — ненулевой. $\square$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы о размерности пространства решений однородной системы. Обозначим через A основную матрицу системы (1). В силу теоремы о ранге матрицы (см. § 27), ранг A по минорам равен r, и потому в A есть ненулевой минор порядка r. Обозначим его через d. Для удобства обозначений будем считать, что d есть определитель матрицы B, расположенной в первых r строках и первых r столбцах матрицы A. В силу леммы о миноре и строках матрицы первые r векторов-строк матрицы A линейно независимы. Так как r — размерность пространства V_A, порожденного векторами-строками матрицы A, а первые r векторов-строк этой матрицы линейно независимы, они образуют базис пространства V_A. Это означает, что все векторы-строки, начиная с $(r+1)$-й, являются линейными комбинациями первых r векторов-строк. Следовательно, все уравнения системы (1), начиная с $(r+1)$-го, являются следствиями первых r уравнений. Вычеркнув все уравнения, начиная с $(r+1)$-го, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1). Ясно, что $r \leqslant n$.

Предположим сначала, что $r = n$. Тогда (2) — крамеровская однородная система, определитель которой равен d и потому отличен от 0. По теореме Крамера (см. § 9) она имеет единственное решение. Поскольку эта система однородна, ее единственным решением является нулевое решение. Следовательно, пространство решений системы (2) является нулевым. Поскольку системы (1) и (2) равносильны, пространство решений системы (1) также является нулевым. Размерность нулевого пространства равна 0, а поскольку $r = n$, то и $n - r = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае заключение теоремы верно.

Пусть теперь $r < n$. Перенеся неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \dotfill \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Присвоим неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ произвольные значения: $x_{r+1} = x^0_{r+1}$, $\dots$, $x_n = x^0_n$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x^0_{r+1} - \cdots - a_{1n}x^0_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2\,r+1}x^0_{r+1} - \cdots - a_{2n}x^0_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}x^0_{r+1} - \cdots - a_{rn}x^0_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Последняя система является крамеровской, а ее определитель равен d, а значит, отличен от 0. По теореме Крамера система (4) имеет единственное решение: $x_1 = x^0_1$, $x_2 = x^0_2$, $\dots$, $x_r = x^0_r$. Ясно, что $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)$ — решение системы (4), а значит и системы (1). Итак, неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ могут принимать любые значения, а значения остальных неизвестных однозначно вычисляются исходя из значений этих $n - r$ неизвестных. Это означает, что неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ и только они являются свободными.

Выберем произвольную свободную неизвестную x_i (разумеется, $r + 1 \leqslant i \leqslant n$) и приравняем в системе (4) x_i к 1, а все остальные свободные неизвестные к 0. В силу сказанного выше полученная система будем иметь единственное решение, которое мы обозначим через $(f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ir})$. Тогда набор скаляров $(f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ir}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на $(r + i)$-м месте, является решением системы (3).

В итоге мы получим следующий набор решений этой системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1r}, 1, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{f}_2 &= (f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2r}, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f}_{n-r} &= (f_{n-r\,1}, f_{n-r\,2}, \ldots, f_{n-r\,r}, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Докажем, что решения $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ образуют базис пространства решений системы (3), а следовательно и пространства решений системы (1). Поскольку число этих решений равно $n - r$, тем самым доказательство теоремы будет завершено. Запишем векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ в матрицу по строкам и обозначим эту матрицу через F. Ясно, что на пересечении всех строк матрицы F и последних $n - r$ ее столбцов стоит единичная матрица. Следовательно, матрица F имеет ненулевой минор порядка $n - r$. В силу леммы о миноре и строках матрицы векторы-строки матрицы F, т. е. векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ линейно независимы.

Осталось показать, что при добавлении к системе векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ любого вектора из пространства решений системы (3) получается линейно зависимая система векторов. С учетом критерия линейной зависимости (см. § 21) достаточно проверить, что всякое решение системы (1) есть линейная комбинация векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$. Пусть $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ — произвольное решение системы (3).

Рассмотрим вектор $\mathbf{g} = h_{r+1}\mathbf{f}_1 + h_{r+2}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_n\mathbf{f}_{n-r} - \mathbf{h}$. Непосредственно проверяется, что все компоненты вектора $\mathbf{g}$, начиная с $(r+1)$-й, равны 0. В силу теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6) вектор $\mathbf{g}$ является решением системы (1). Поскольку последние $n-r$ компонент вектора $\mathbf{g}$ равны нулю, первые r компонент этого вектора должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений, которая получается из системы (2), если положить $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта система является крамеровской, а ее определитель равен d и потому отличен от 0. По теореме Крамера система (5) имеет единственное решение. Поскольку эта система однородна, ее единственным решением является нулевое решение. Таким образом, первые r компонент вектора $\mathbf{g}$, как и последние $n-r$ его компонент, равны 0. Следовательно, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ и потому $\mathbf{h} = h_{r+1}\mathbf{f}_1 + h_{r+2}\mathbf{f}_2 + \cdots + h_n\mathbf{f}_{n-r}$. Итак, произвольное решение системы (3) является линейной комбинацией векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$. Мы доказали, что векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ образуют базис пространства решений системы (3). Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Определение

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Если однородная система имеет единственное решение, то это решение является нулевым, а значит, пространство решений этой системы является нулевым пространством. Как отмечалось в § 22, нулевое векторное пространство не имеет базиса. Таким образом, справедливо следующее

Замечание о фундаментальном наборе и системе с единственным решением

Если однородная система линейных уравнений имеет единственное решение, то фундаментального набора решений этой системы не существует.

Если же однородная система является неопределенной, то, найдя ее фундаментальную систему решений, мы, фактически, найдем все ее решения, поскольку, по теореме о разложении вектора по базису, любое решение системы является линейной комбинацией решений, входящих в фундаментальную систему решений.

Согласно замечанию о числе свободных переменных из § 7, если система линейных уравнений является неопределенной, то число ее свободных переменных равно $n - r$, где n — число неизвестных в системе, а r — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду. Сопоставляя этот факт с приведенным в § 27 алгоритмом нахождения ранга матрицы и с теоремой о размерности пространства решений однородной системы, мы получаем следующий факт, полезный при решении конкретных систем линейных уравнений.

Замечание о числе векторов в фундаментальной системе решений

Если однородная система линейных уравнений является неопределенной, то число векторов в фундаментальной системе решений этой системы равно числу ее свободных переменных. □

Предположим, что мы решаем систему линейных уравнений с n неизвестными, k из которых, скажем, $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$, являются свободными. В силу замечания о числе векторов в фундаментальной системе решений фундаментальная система решений нашей системы состоит из k векторов. Обозначим векторы, входящие в фундаментальную систему решений, через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$. Чтобы найти эти векторы, мы должны заполнить следующую таблицу, в которой свободные переменные выделены красным цветом, а соответствующие им клетки таблицы — зеленым:

Табл. 1. Фундаментальная система решений
(не заполненная таблица)

	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-k}	x_{n-k+1}	x_{n-k+2}	$\ldots$	x_n
$\mathbf{f}_1$			$\ldots$				$\ldots$	
$\mathbf{f}_2$			$\ldots$				$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\mathbf{f}_k$			$\ldots$				$\ldots$	

В доказательстве теоремы о размерности пространства решений однородной системы «зеленые» клетки из табл. 1 заполнялись так, как указано в табл. 2.

Табл. 2. Фундаментальная система решений
(частично заполненная таблица)

	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-k}	x_{n-k+1}	x_{n-k+2}	$\ldots$	x_n
$\mathbf{f}_1$			$\ldots$		1	0	$\ldots$	0
$\mathbf{f}_2$			$\ldots$		0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\mathbf{f}_k$			$\ldots$		0	0	$\ldots$	1

Иными словами, на место квадратной матрицы, которую образуют эти зеленые клетки, вписывалась единичная матрица. Иногда при решении конкретных систем буквальное следование этому алгоритму может привести к достаточно громоздким вычислениям. Поэтому полезно иметь в виду следующее замечание.

- *На место квадратной матрицы, соответствующей свободным переменным, можно вписывать не только единичную матрицу, но и произвольную невырожденную квадратную матрицу порядка k.*

В самом деле, это гарантирует наличие во всей матрице размера $k \times n$, указанной в табл. 1, ненулевого минора порядка k. Следовательно, ранг этой матрицы по минорам будет равен k. В силу теоремы о ранге, ее ранг по строкам тоже будет равен k. Это будет означать, что все векторы-строки нашей матрицы, т. е. векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ будут линейно независимы. А этого, как показано в доказательстве теоремы, достаточно для того, чтобы они образовывали фундаментальную систему решений.

Знание фундаментальной системы решений однородной системы позволяет записать ее общее решение в векторном виде. А именно, если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ — фундаментальная система решений (т. е. базис пространства решений) однородной системы, то общее решение системы совпадает с множеством всех векторов вида $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k$, где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные скаляры. Более того, сказанное выше позволяет находить общее решение и неоднородной системы линейных уравнений. В самом деле, предположим, что нам дана произвольная неопределенная система линейных уравнений. Предположим, что $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Предположим также, что мы нашли (например, с помощью метода Гаусса) одно частное решение $\mathbf{f}_0$ заданной неоднородной системы. В силу теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений (см. § 6) общее решение этой системы совпадает с множеством всех векторов вида

$$\mathbf{f}_0 + c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + \cdots + c_k\mathbf{f}_k.$$

Это выражение называется *векторной записью общего решения системы линейных уравнений*.