Глава VIII. Линейные операторы

§ 29. Линейный оператор, матрица оператора в базисе

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Понятие линейного оператора

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F. Отображение $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow V$ называется *линейным оператором*, если для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и любого скаляра $t \in F$ выполняются равенства $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$.

- Относительно первого равенства из определения говорят, что $\mathcal{A}$ *сохраняет сумму векторов*, относительно второго — что $\mathcal{A}$ *сохраняет произведение вектора на скаляр*.
- Если рассматривать векторные пространства как универсальные алгебры, то линейный оператор в пространстве V — это эндоморфизм пространства V.

Приведем примеры линейных операторов.

Пример 1. Представим пространство $\mathbb{R}_2$ как множество направленных отрезков на плоскости, выходящих из начала координат O. Тогда поворот на угол α, симметрия относительно любой прямой, проходящей через начало координат (в частности, относительно любой из осей координат), симметрия относительно точки O, проекция на любую из осей координат — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_2$. Если интерпретировать $\mathbb{R}_3$ как множество направленных отрезков трехмерного пространства, выходящих из начала координат O, то симметрия относительно любой прямой или плоскости, проходящей через точку O, симметрия относительно этой точки, проекция на любую из координатных плоскостей — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_3$.

Пример 2. Зафиксируем произвольный скаляр t и зададим оператор $\mathcal{A}$ следующим правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Этот оператор называется *оператором растяжения в t раз*. Линейность оператора растяжения с очевидностью вытекает из определения векторного пространства (см. § 21). Особо отметим два частных случая оператора растяжения. Первый из них — это оператор растяжения при $t = 0$. Он обозначается буквой $\mathcal{O}$ и называется *нулевым*. Ясно, что нулевой оператор переводит произвольный вектор из V в нулевой вектор. Второй частный случай оператора растяжения возникает при $t = 1$. Соответствующий оператор обозначается буквой $\mathcal{E}$ и называется *тождественным* или *единичным*. Этот оператор переводит произвольный вектор из V в себя.

Пример 3. Зафиксируем в пространстве V некоторое подпространство M. В силу предложения о дополняющем подпространстве (см. § 24) существует подпространство M' в V такое, что $V = M \oplus M'$. Следовательно, произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M'$ (см. теорему о прямой сумме подпространств в § 24). Рассмотрим оператор $\mathcal{P}$ в пространстве V, задаваемый правилом $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$. Легко проверяется, что этот оператор — линейный. Он называется *оператором проектирования на подпространство* M *параллельно* M'.

Пример 4. В пространстве $F[x]$ всех многочленов над полем F определим оператор $\mathcal{D}$ правилом: $\mathcal{D}(p) = p'$, где p' — производная многочлена p. Этот оператор называется *оператором дифференцирования*. Из свойств производной вытекает, что этот оператор линеен. Точно так же определяется оператор дифференцирования в пространстве $F_n[x]$ всех многочленов степени $\leqslant n$ над F.

Пример 5. Пусть F — поле, n — натуральное число, а A — квадратная матрица порядка n над полем F. Определим оператор $\mathcal{A}$ в F_n правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in F_n$. Вектор $\mathbf{x}$ рассматривается здесь как матрица размера $1 \times n$, и потому $\mathbf{x} \cdot A$ — это обычное произведение матриц, результатом которого является матрица размера $1 \times n$, т. е. вектор из F_n. Из свойств произведения матриц вытекает, что этот оператор линеен (см. § 25).

Пример 6. Пусть F — поле, n — натуральное числа, а A и B — квадратные матрицы порядка n над полем F. Определим оператор $\mathcal{M}$ в пространстве $F^{n \times n}$ правилом: $\mathcal{M}(X) = AXB$ для всякой матрицы $X \in F^{n \times n}$. Как и в предыдущем примере, линейность этого оператора вытекает из свойств произведения матриц.

Следующими свойствами линейных операторов мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Замечание о свойствах линейного оператора

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V. Тогда:

1) $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2) $\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m) = \lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) + \cdots + \lambda_m\mathcal{A}(\mathbf{v}_m)$ *для любых векторов* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ *и любых скаляров* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$.

Доказательство. Первое свойство вытекает из того, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Второе свойство непосредственно вытекает из определения линейного оператора. $\square$

Теорема существования и единственности линейного оператора

Пусть V — векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, а $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_n$ — произвольные векторы из V. Тогда существует, и притом только один, линейный оператор $\mathcal{A}$ в V такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Существование. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P. Определим оператор $\mathcal{A}$ в V правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \dots + x_n\mathbf{w}_n$. В силу единственности координат вектора в базисе это определение корректно (т. е. образ вектора $\mathbf{x}$ под действием $\mathcal{A}$ определен однозначно). А из замечания о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр (см. § 22) вытекает, что этот оператор линеен. Осталось заметить, что, для всякого $i = 1, 2, \dots, n$, вектор $\mathbf{p}_i$ имеет в базисе P координаты $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте, и потому $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$.

Единственность. Пусть $\mathcal{B}$ — линейный оператор в V такой, что $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P. Тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n$. В силу замечания о свойствах линейного оператора имеем

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{B}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{B}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{B}(\mathbf{p}_n) =$$
$$= x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Следовательно, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. □

- Доказанная только что теорема устанавливает, что линейный оператор в V однозначно определяется тем, как он действует на базисных векторах пространства V. Поэтому для того, чтобы иметь полную информацию о линейном операторе, достаточно знать координаты образов этих базисных векторов в каком-нибудь базисе пространства V. Это делает естественным определение матрицы линейного оператора в базисе, которое дано на следующем слайде.

Матрица линейного оператора в базисе

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис этого пространства. Квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе P (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$), называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе P*. Эта матрица обозначается через A_P, а если базис однозначно определяется из контекста или неважен — то просто через A .

Нахождение координат образа вектора с помощью матрицы оператора (1)

Обозначение

Если V — векторное пространство, $\dim V = n$, P — произвольный базис в V, а $\mathbf{x} \in V$, будем обозначать через $[\mathbf{x}]_P$ матрицу размера $n \times 1$ (т. е. столбец длины n), в которой записаны координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, который в базисе $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ имеет матрицу $A_P = (a_{ij})$, а $\mathbf{x} \in V$. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Как найти координаты вектора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе P? Обозначим эти координаты через $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда

$$y_1\mathbf{p}_1 + y_2\mathbf{p}_2 + \cdots + y_n\mathbf{p}_n = \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = \\ = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n).$$

Поскольку столбцы матрицы A_P — это координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, $\ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$ в базисе P, выполнены равенства

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\mathbf{p}_1) & = & a_{11}\mathbf{p}_1 + a_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{p}_n, \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_2) & = & a_{12}\mathbf{p}_1 + a_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{p}_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) & = & a_{1n}\mathbf{p}_1 + a_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{p}_n. \end{array}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{p}_1 + y_2\mathbf{p}_2 + \cdots + y_n\mathbf{p}_n &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n) = \\ &= x_1\big(a_{11}\mathbf{p}_1 + a_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{p}_n\big) + \\ &+ x_2\big(a_{12}\mathbf{p}_1 + a_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{p}_n\big) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ x_n\big(a_{1n}\mathbf{p}_1 + a_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{p}_n\big) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{p}_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{p}_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\mathbf{p}_n\ . \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора по базису это означает, что

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Эту систему равенств можно переписать в виде

$$\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_P = A_P \cdot [\mathbf{x}]_P. \tag{1}$$

Если нужно записать координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в строку, а не в столбец, то можно использовать следующее равенство, которое получится, если транспонировать обе части равенства (1) и воспользоваться свойствами транспонирования матриц:

$$\left[\mathcal{A}(\mathbf{x})\right]_P^\top = [\mathbf{x}]_P^\top \cdot A_P^\top. \tag{2}$$

Ясно, что матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах могут быть различными. Чтобы выяснить, как они связаны между собой, нам понадобится понятие матрицы перехода от одного базиса к другому.

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ — базисы этого пространства. *Матрицей перехода от базиса* P *к базису* Q называется квадратная матрица порядка n, в которой, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$, в i-м столбце записаны координаты вектора q_i в базисе P. Эта матрица обозначается через T_{PQ}. При этом базис P мы будем называть *старым*, а базис Q — *новым*.

Отметим, что в случае трехмерного физического пространства матрица перехода от одного базиса к другому уже возникала в § 14.

Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому (1)

Пусть P и Q — базисы векторного пространства V. Чтобы найти матрицу T_{PQ}, надо найти координаты каждого из векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в базисе P. Для этого можно воспользоваться изложенным в § 22 алгоритмом нахождения координат вектора в базисе. В соответствии с этим алгоритмом, чтобы найти координаты вектора $\mathbf{q}_i$ в базисе P (где $1 \leqslant i \leqslant n$), надо решить методом Гаусса–Жордана крамеровскую систему линейных уравнений, у которой в основной матрице по столбцам записаны координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в некотором базисе, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{q}_i$ в том же базисе. Иными словами, надо решить n систем линейных уравнений, которые имеют одну и ту же основную матрицу и отличаются только столбцом свободных членов. Ясно, что при решении всех этих систем почти все преобразования будут одинаковыми, по разному будет меняться лишь последний столбец. Для того, чтобы сэкономить время, можно решать все эти системы одновременно в соответствии с алгоритмом, который сформулирован на следующем слайде.

Алгоритм нахождения матрицы перехода от одного базиса к другому

Чтобы найти матрицу перехода от базиса $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ векторного пространства V к базису $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ того же пространства, надо составить матрицу размера $n \times 2n$, записав в ее левую часть (первые n столбцов) координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в некотором базисе, а в ее правую часть (последние n столбцов) координаты векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в том же базисе. После этого надо элементарными преобразованиями всей матрицы привести ее левую часть к единичному виду. В этот момент в правой части по столбцам будут записаны координаты векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в базисе P, т. е. матрица T_{PQ}.

В случае, когда $V = F_n$, а в качестве старого базиса выступает стандартный базис пространства F_n, матрицу перехода от него к любому другому можно выписать сразу, без всяких вычислений. В самом деле, сравнивая определение матрицы перехода от одного базиса к другому с замечанием о компонентах вектора (см. § 22), мы получаем

Замечание о матрице перехода от стандартного базиса к произвольному

Матрицей перехода от стандартного базиса пространства F_n к произвольному базису Q этого пространства является матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса Q. $\square$

Предложение о матрице перехода

Пусть V — векторное пространство, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$ — базисы этого пространства. Матрица T_{PQ} обратима и обратной к ней является матрица T_{QP}.

Доказательство. Положим $T_{PQ} = (t_{ij})$ и $T_{QP} = (s_{ij})$. Достаточно доказать, что $T_{PQ}T_{QP} = E$. Пусть $T_{PQ}T_{QP} = (x_{ij})$. Используя определение матрицы перехода от одного базиса к другому, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_j &= s_{1j}\mathbf{q}_1 + s_{2j}\mathbf{q}_2 + \dots + s_{nj}\mathbf{q}_n = \\
&= s_{1j}(t_{11}\mathbf{p}_1 + t_{21}\mathbf{p}_2 + \dots + t_{n1}\mathbf{p}_n) + \\
&+ s_{2j}(t_{12}\mathbf{p}_1 + t_{22}\mathbf{p}_2 + \dots + t_{n2}\mathbf{p}_n) + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ s_{nj}(t_{1n}\mathbf{p}_1 + t_{2n}\mathbf{p}_2 + \dots + t_{nn}\mathbf{p}_n).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перегруппировывая слагаемые и учитывая определение произведения матриц, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_j &= (t_{11}s_{1j} + t_{12}s_{2j} + \dots + t_{1n}s_{nj})\mathbf{p}_1 + \\
&+ (t_{21}s_{1j} + t_{22}s_{2j} + \dots + t_{2n}s_{nj})\mathbf{p}_2 + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ (t_{n1}s_{1j} + t_{n2}s_{2j} + \dots + t_{nn}s_{nj})\mathbf{p}_n = \\
&= x_{1j}\mathbf{p}_1 + x_{2j}\mathbf{p}_2 + \dots + x_{nj}\mathbf{p}_n.
\end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathbf{p}_j = 0 \cdot \mathbf{p}_1 + \cdots + 0 \cdot p_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{p}_j + 0 \cdot p_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{p}_n$. В силу единственности разложения вектора по базису получаем, что

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Это и означает, что $T_{PQ} T_{QP} = E$. $\square$

Выясним, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах.

Лемма о замене координат вектора

Пусть V *— векторное пространство,* $\mathbf{x} \in V$, *а* $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *и* $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ *— базисы пространства* V. *Тогда*

$$[\mathbf{x}]_P = T_{PQ}[\mathbf{x}]_Q. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а его координаты в базисе Q — через $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Положим $T_{PQ} = (t_{ij})$.

Вычислим двумя способами вектор $\mathbf{x}$. С одной стороны, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n$. С другой,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x'_1\mathbf{q}_1 + x'_2\mathbf{q}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{q}_n = \\
&= x'_1(t_{11}\mathbf{p}_1 + t_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{p}_n) + \\
&+ x'_2(t_{12}\mathbf{p}_1 + t_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{p}_n) + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ x'_n(t_{1n}\mathbf{p}_1 + t_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{p}_n) = \\
&= (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n)\mathbf{p}_1 + \\
&+ (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n)\mathbf{p}_2 + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n)\mathbf{p}_n.
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора по базису, имеем

$$\begin{cases}
x_1 = t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n, \\
x_2 = t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n = t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n.
\end{cases}$$

Ясно, что этот набор равенств эквивалентен матричному равенству (3). $\square$

Теперь мы уже готовы доказать следующее утверждение.

Теорема о замене матрицы оператора

Пусть V *— векторное пространство,* $\mathcal{A}$ *— линейный оператор в* V*, а* $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *и* $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ *— базисы пространства* V*. Тогда*

$$A_Q = T_{QP} A_P T_{PQ}. \tag{4}$$

Доказательство. В силу формулы (1) выполнены равенства $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P = A_P \cdot [\mathbf{x}]_P$ и $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_Q = A_Q \cdot [\mathbf{x}]_Q$. Кроме того, в силу формулы (3), верно равенство $[\mathbf{x}]_P = T_{PQ} \cdot [\mathbf{x}]_Q$. Следовательно,

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P = A_P \cdot [\mathbf{x}]_P = A_P T_{PQ} \cdot [\mathbf{x}]_Q.$$

С другой стороны, из равенства (3), примененного к вектору $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, и равенства (1), примененного к базису Q, вытекает, что

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_P = T_{PQ}[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_Q = T_{PQ}A_Q \cdot [\mathbf{x}]_Q.$$

Сравнивая две последние цепочки равенств, получаем, что

$$A_P T_{PQ} \cdot [\mathbf{x}]_Q = T_{PQ}A_Q \cdot [\mathbf{x}]_Q.$$

Ясно, что любая матрица размера $n \times 1$, где $n = \dim V$, совпадает со столбцом вида $[\mathbf{x}]_Q$ для подходящего вектора $\mathbf{x}$. Поэтому мы можем применить ослабленный закон сокращения для матриц (см. § 25) и получить, что $A_P T_{PQ} = T_{PQ}A_Q$. Принимая во внимание предложение о матрице перехода, умножим обе части последнего равенство слева на матрицу $T_{PQ}^{-1} = T_{QP}$. В результате получится равенство (4). $\square$

Положим $A = A_P$, $A' = A_Q$ и $T = T_{PQ}$. Тогда, с учетом предложения о матрице перехода, формулу (4) можно переписать в виде $A' = T^{-1}AT$.

Определение

Квадратные матрицы A и B над некоторым полем F называются *подобными*, если существует невырожденная квадратная матрица T над F такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом,

- *матрицы одного и того же линейного оператора в любых двух базисах подобны.* □

Лемма об отношении подобия матриц

Отношение подобия на множестве всех квадратных матриц одного и того же порядка является отношением эквивалентности.

Доказательство. В самом деле, это отношение рефлексивно (т. е. всякая квадратная матрица подобна сама себе), поскольку $A = EAE = E^{-1}AE$, симметрично, поскольку умножая равенство $B = T^{-1}AT$ на T слева и на T^{-1} справа, мы получим $A = TBT^{-1} = (T^{-1})^{-1}BT^{-1}$, и транзитивно, поскольку из равенств $B = T^{-1}AT$ и $C = S^{-1}BS$ вытекает, что $C = S^{-1}T^{-1}ATS = (TS)^{-1}A(TS)$. □