

§ 40. Положительно определенные квадратичные формы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем F можно рассматривать как отображение из множества F^n в F , которое каждому упорядоченному набору скаляров $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in F^n$ ставит в соответствие скаляр $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in F$. Этот скаляр естественно называть *значением формы* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Набор значений переменных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется *ненулевым*, если найдется $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такой, что $x_i^0 \neq 0$.

Во многих приложениях важную роль играют формы над полем \mathbb{R} , значение которых на любом ненулевом наборе значений переменных больше 0. Их изучению и посвящен данный параграф.

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем \mathbb{R} , значение которой на любом ненулевом наборе значений переменных положительно, называется *положительно определенной*.

- *Всюду далее в этом параграфе рассматриваются только квадратичные формы над полем \mathbb{R} . В явном виде это, как правило, оговариваться не будет.*

1-й критерий положительной определенности

Пусть квадратичная форма $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет канонический вид $t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \dots + t_n y_n^2$. Форма f положительно определена тогда и только тогда, когда $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$.

Доказательство. Пусть форма f приводится к указанному в формулировке критерия каноническому виду невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n. \end{cases} \quad (1)$$

Нам понадобится также обратная замена:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

Она тоже невырожденна.

1-й критерий положительной определенности (2)

Необходимость. Предположим, что $t_i \leq 0$ для некоторого i . Положим $y'_i = 1$ и $y'_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$. Подставим в левые части равенств (2) y'_1 вместо y_1 , y'_2 вместо y_2 , ..., y'_n вместо y_n . Получим неоднородную крамеровскую систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ c_{i-11}x_1 + c_{i-12}x_2 + \dots + c_{i-1n}x_n = 0, \\ c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n = 1, \\ c_{i+11}x_1 + c_{i+12}x_2 + \dots + c_{i+1n}x_n = 0, \\ \dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Матрица этой крамеровской системы совпадает с матрицей замены (2). Поскольку эта замена невырождена, получаем, что определитель системы (3) отличен от нуля. По теореме Крамера система (3) имеет единственное решение $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Это решение — ненулевое, так как система (3) неоднородна. Поскольку $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \dots + t_n y_n^2$, имеем

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = t_1 (y'_1)^2 + t_2 (y'_2)^2 + \dots + t_n (y'_n)^2 = t_i \leq 0.$$

Следовательно, форма f не является положительно определенной.
Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть x'_1, x'_2, \dots, x'_n — произвольный ненулевой набор значений переменных формы f . Подставив их в равенства (2), получим набор y'_1, y'_2, \dots, y'_n значений переменных y_1, y_2, \dots, y_n . Если $y'_1 = y'_2 = \dots = y'_n = 0$, то, подставив эти значения в правые части равенств (1), получим, что $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_n = 0$. Следовательно, набор y'_1, y'_2, \dots, y'_n — ненулевой. Поскольку, по условию, $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$, имеем

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = t_1(y'_1)^2 + t_2(y'_2)^2 + \dots + t_n(y'_n)^2 > 0.$$

Следовательно, форма f положительно определена. □

Для того, чтобы сформулировать еще один критерий положительной определенности формы, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n . Миноры этой матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах (для всех $k = 1, 2, \dots, n$) называются **угловыми минорами** матрицы A . Угловым минором порядка k обозначается через Δ_k .

В частности, $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_n = |A|$.

Критерий Сильвестра (2-й критерий положительной определенности)

Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство проведем индукцией по числу переменных формы f . Обозначим это число через n .

База индукции очевидна: форма от одной переменной имеет вид $a_{11}x_1^2$. Ясно, что она положительно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} > 0$, а единственным угловым минором матрицы $A = (a_{11})$ этой формы является число a_{11} .

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 1$. Представим форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + a_{nn}x_n^2 + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n, \quad (4)$$

где $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ — сумма всех слагаемых формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не содержащих x_n . Обозначим матрицу формы f через A , а угловые миноры этой матрицы — через $\Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Необходимость. Предположим, что форма f положительно определена. Если форма $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ не является положительно определенной, то существует ненулевой набор значений переменных $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ такой, что $g(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}) \leq 0$. Тогда

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0) = g(x'_1, \dots, x'_{n-1}) \leq 0,$$

что противоречит положительной определенности формы f . Таким образом, форма g положительно определена. По предположению индукции, ее угловые миноры, совпадающие с минорами $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$, положительны. Сделаем замену $X = TY$, которая приводит форму f к каноническому виду, и обозначим через D (диагональную) матрицу полученной формы. Из 1-го критерия положительной определенности вытекает, что $|D| > 0$.

Подставив правые части равенств (5) в правую часть равенства (4), получим форму

$$\begin{aligned}
 f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n) &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}x_n^2 + \\
 &+ 2a_{1n}(t_{11}y_1 + t_{12}y_2 + \dots + t_{1\ n-1}y_{n-1})x_n + \\
 &+ 2a_{2n}(t_{21}y_1 + t_{22}y_2 + \dots + t_{2\ n-1}y_{n-1})x_n + \\
 &+ \dots + \\
 &+ 2a_{n-1\ n}(t_{n-1\ 1}y_1 + t_{n-1\ 2}y_2 + \dots + t_{n-1\ n-1}y_{n-1})x_n = \\
 &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}x_n^2 + \\
 &+ 2(a_{1n}t_{11} + a_{2n}t_{21} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ 1})y_1x_n + \\
 &+ 2(a_{1n}t_{12} + a_{2n}t_{22} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ 2})y_2x_n + \\
 &+ \dots + \\
 &+ 2(a_{1n}t_{1\ n-1} + a_{2n}t_{2\ n-1} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ n-1})y_{n-1}x_n.
 \end{aligned}$$

Полагая $b_{in} = a_{1n}t_{1i} + a_{2n}t_{2i} + \dots + a_{n-1\ n}t_{n-1\ i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$, имеем:

$$\begin{aligned}
 f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n) &= b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{n-1\ n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}x_n^2 + \\
 &+ 2b_{1n}y_1x_n + 2b_{2n}y_2x_n + \dots + 2b_{n-1\ n}y_{n-1}x_n.
 \end{aligned}$$

Выделив полный квадрат по каждой из переменных y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , получим:

$$\begin{aligned}
 f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n) = & b_{11} \left(y_1 + \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot x_n \right)^2 + b_{22} \left(y_2 + \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot x_n \right)^2 + \dots + \\
 & + b_{n-1\ n-1} \left(y_{n-1} + \frac{b_{n-1\ n}}{b_{n-1\ n-1}} \cdot x_n \right)^2 + \\
 & + \left(a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \dots - \frac{b_{n-1\ n}^2}{b_{n-1\ n-1}} \right) x_n^2.
 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
 y_1 = & z_1 & - \frac{b_{1n}}{b_{11}} \cdot x_n, \\
 y_2 = & z_2 & - \frac{b_{2n}}{b_{22}} \cdot x_n, \\
 \dots & & \dots \\
 y_{n-1} = & & z_{n-1} - \frac{b_{n-1\ n}}{b_{n-1\ n-1}} \cdot x_n, \\
 x_n = & & z_n.
 \end{array} \right.$$

Обозначим матрицу этой замены через T .

Поскольку

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{b_{2n}}{b_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{b_{n-1n}}{b_{n-1n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеем $|T| = 1$. В частности, наша замена невырождена. В результате этой замены форма f перейдет в форму

$$b_{11}z_1^2 + b_{22}z_2^2 + \dots + b_{n-1n-1}z_{n-1}^2 + b_{nn}z_n^2,$$

где $b_{nn} = a_{nn} - \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - \frac{b_{2n}^2}{b_{22}} - \dots - \frac{b_{n-1n}^2}{b_{n-1n-1}}$. Обозначим матрицу этой формы через D . Эта матрица диагональна, а на ее главной диагонали стоят числа $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$. Поскольку $D = T^T A T$, а $|T^T| = |T| = 1$, имеем

$$b_{11}b_{22} \dots b_{n-1n-1}b_{nn} = |D| = |T^T A T| = |T^T| \cdot |A| \cdot |T| = |A| = \Delta_n.$$

Из (6) и того факта, что $\Delta_n > 0$, вытекает, что

$$b_{nn} = \frac{\Delta_n}{b_{11}b_{22} \dots b_{n-1n-1}} > 0.$$

В силу 1-го критерия положительной определенности, форма f положительно определена.