# § 44. Классификация квадрик на плоскости

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Цель данного параграфа — указать все типы кривых второго порядка. Начнем с точного определения этого понятия.

**Определение**

*Квадрикой на плоскости* (или *кривой 2-го порядка*) называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют *уравнению 2-го порядка с двумя неизвестными*, т. е. уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{1}$$

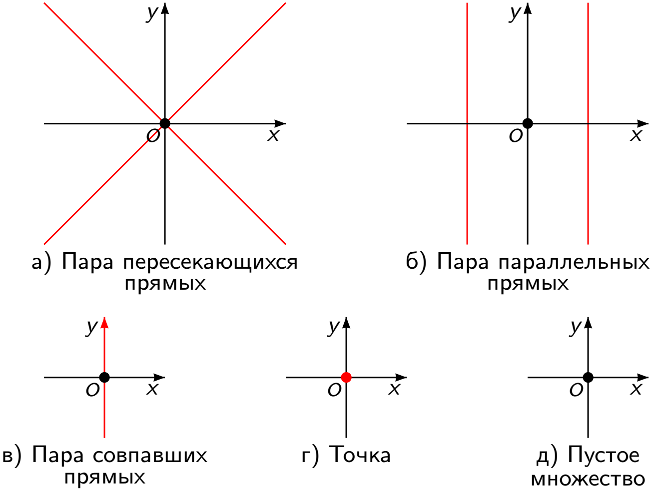
где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Примерами квадрик на плоскости являются кривые, рассмотренные в трех предыдущих параграфах, — эллипс, гипербола и парабола. Рассмотрим еще несколько уравнений вида (1) и выясним, какие квадрики они задают.

1) $x^2 - y^2 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $(x - y)(x + y) = 0$ и потому задает *пару пересекающихся прямых* с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$.
2) $x^2 - 1 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $(x - 1)(x + 1) = 0$ и потому задает *пару параллельных прямых* с уравнениями $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$.
3) $x^2 = 0$. Это уравнение, очевидно, равносильно уравнению $x = 0$ и потому задает на плоскости прямую (ось ординат). В теории квадрик на плоскости квадрику, задаваемую уравнением $x^2 = 0$, принято называть *парой совпавших прямых*. Этот термин объясняется следующими соображениями. Рассмотрим пару параллельных прямых $x = \pm a$, где $a > 0$, задаваемую уравнением $x^2 = a^2$. Если $a \longrightarrow 0$, то прямые $x = a$ и $x = -a$ «сближаются» и в пределе, при $a = 0$, совпадают друг с другом.
4) $x^2 + y^2 = 0$. Это уравнение равносильно равенствам $x = y = 0$ и потому задает на плоскости *точку* (начало координат).
5) $x^2 + 1 = 0$. Точек, координаты которых удовлетворяли бы этому уравнению, не существует. Поэтому его геометрическим образом является *пустое множество*.

# Вырожденные квадрики на плоскости (рисунок)

Квадрики, перечисленные в пп. 1)–5) на предыдущем слайде, иногда называют *вырожденными*. Они изображены на рис. 1.




а) Пара пересекающихся прямых

б) Пара параллельных прямых

в) Пара совпавших прямых

г) Точка

д) Пустое множество

Рис. 1. Вырожденные квадрики на плоскости

Оказывается, что никаких других квадрик, кроме упомянутых выше в данном параграфе, не существует. А именно, справедлива следующая

**Теорема о классификации квадрик на плоскости**

*Всякая квадрика на плоскости является или эллипсом, или гиперболой, или параболой, или парой прямых (пересекающихся, параллельных или совпавших), или точкой, или пустым множеством.*

Доказательство этой теоремы весьма длинное — ему будет посвящена вся оставшаяся часть данного параграфа. Отметим, однако, что это доказательство несложно по своей сути (оно сводится к простым вычислениям и перебору большого числа возникающих при этом случаев). Еще более важно то, что это доказательство конструктивно: в нем, по сути дела, изложен алгоритм, следуя которому можно определить тип квадрики, заданной произвольным уравнением вида (1), и найти систему координат, в которой уравнение этой квадрики имеет наиболее простой вид. Последнее обстоятельство особенно ценно с точки зрения решения задач.

- Приведение уравнения произвольной квадрики к простейшему виду, описываемое в доказательстве теоремы о классификации квадрик на плоскости, принято называть *приведением квадрики к каноническому виду*.

*Доказательство.* Пусть в системе координат $Oxy$ квадрика $\ell$ задается уравнением (1). Разобьем дальнейшие рассуждения на три шага.

*Шаг 1.* Проверим прежде всего, что систему $Oxy$ можно повернуть вокруг точки $O$ на некоторый угол $\alpha$ так, что в новой системе координат уравнение той же квадрики $\ell$ не будет содержать слагаемого с произведением неизвестных.

Если $a_{12} = 0$, то уже в исходной системе координат уравнение квадрики $\ell$ не содержит слагаемого с произведением неизвестных и в качестве искомого $\alpha$ можно взять угол $0^\circ$. Поэтому далее можно считать, что

$$a_{12} \neq 0. \tag{2}$$

Повернем систему $Oxy$ на некоторый угол $\alpha$. В новой системе координат квадрика будет иметь уравнение вида

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0.$$

# Доказательство классификационной теоремы: шаг 1 (2)

Используя формулы (9) из § 14, легко проверить, что

$$2a'_{12} = 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha = \\ = 2a_{12}\cos 2\alpha - (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha.$$

Следовательно, $2a'_{12} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha. \tag{3}$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$ (в противном случае, т. е. при «повороте» системы координат на $0^\circ$, коэффициент при $xy$ останется без изменения и потому будет отличен от 0). Следовательно, и $2\alpha \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и потому $0 < 2\alpha < \pi$ (если найдется удовлетворяющий этому ограничению угол $\alpha$ такой, что выполнено равенство (3), то этого будет достаточно для наших целей).
Следовательно,

$$\sin 2\alpha \neq 0. \tag{4}$$

Неравенства (2) и (4) позволяют нам разделить обе части равенства (3) на $2a_{12}\sin 2\alpha$. В результате мы получаем следующее уравнение относительно $\alpha$:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5}$$

Это уравнение всегда имеет решение. Повернув систему координат на угол $\alpha$, являющийся решением этого уравнения, мы добьемся поставленной цели — «уберем» из уравнения квадрики слагаемое с произведением неизвестных.

- При решении конкретных задач для выполнения этого шага надо будет использовать формулы поворота системы координат на угол $\alpha$, в которых фигурируют $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а не $\operatorname{ctg} 2\alpha$ (см. формулы (9) в § 14). Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, зная $\operatorname{ctg} 2\alpha$, можно следующим образом. Сначала надо использовать равенство $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. Поскольку $\operatorname{ctg} 2\alpha$ известен, это равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$ (в самом деле, если положить $t = \operatorname{tg}\alpha$ и $a = \operatorname{ctg} 2\alpha$, то наше уравнение можно переписать в виде $t^2 + 2at - 1 = 0$). Решив его, мы получим два возможных значения для $\operatorname{tg}\alpha$. Выбрав любое из них, можно с помощью уравнения $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ найти два возможных значения для $\cos\alpha$. Вновь можно выбрать любое из них, после чего $\sin\alpha$ однозначно находится из равенства $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$.

Итак, после поворота на угол $\alpha$, определяемый уравнением (5), $a'_{12} = 0$. Обозначим через $A$ матрицу квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$. После поворота системы координат на угол $\alpha$ мы получим, что в новой системе координат наша квадрика будет иметь уравнение вида (1), в котором сумма слагаемых второй степени образует некоторую квадратичную форму. Матрица $D$ этой формы диагональна и $D = T^\top AT$, где $T$ — матрица поворота системы координат на угол $\alpha$ (см. § 14). Поскольку матрица $T$ невырожденна, из следствия о ранге произведения квадратных матриц (см. § 27) вытекает, что $r(D) = r(A)$. Но матрица $A$ ненулевая. Следовательно, $r(A) \neq 0$, откуда $r(D) \neq 0$, а значит и матрица $D$ ненулевая. Таким образом, в уравнении квадрики в новой системе координат по крайней мере один из коэффициентов при квадратах переменных будет отличен от нуля. Другими словами, в новой системе координат уравнение квадрики $\ell$ имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{6}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}$ и $a_{22}$ отличен от 0.

*Шаг 2.* Проверим теперь, что параллельным переносом системы координат можно избавиться от линейных слагаемых. Более точно, мы установим, что:

а) если $a_{11} \neq 0$, то сдвигом начала системы координат вдоль оси $Ox$ можно получить новую систему координат, в которой в уравнении квадрики $\ell$ коэффициент при $x$ равен 0;

б) если $a_{22} \neq 0$, то сдвигом начала системы координат вдоль оси $Oy$ можно получить новую систему координат, в которой в уравнении квадрики $\ell$ коэффициент при $y$ равен 0.

Оба этих утверждения доказываются абсолютно аналогично. Поэтому мы ограничимся проверкой только первого из них. Итак, пусть $a_{11} \neq 0$.

В уравнении (6) выделим полный квадрат по $x$:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} = 0.$$

Проведем замену неизвестных:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y . \end{cases}$$

Геометрически этой замене неизвестных соответствует параллельный перенос системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $(-\frac{a_1}{a_{11}}, 0)$. В новой системе координат квадрика $\ell$ имеет уравнение

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_2 y' + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$. Коэффициент при $x$ в этом уравнении равен 0. При необходимости, т. е. в случае, когда $a_{22} \neq 0$, аналогичным образом (выделив полный квадрат по $y$) можно обнулить коэффициент при $y$.

Итак, мы можем считать, что уравнение квадрики $\ell$ имеет один из следующих видов:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \quad \text{где } A \neq 0,\ B \neq 0, \tag{7}$$

$$Dx^2 + 2Ey + F = 0, \quad \text{где } D \neq 0, \tag{8}$$

$$Dy^2 + 2Ex + F = 0, \quad \text{где } D \neq 0. \tag{9}$$

Если квадрика имеет уравнение вида (8), то, сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \end{cases} \tag{10}$$

мы придем к уравнению (9). Поэтому далее можно считать, что квадрика имеет либо уравнение вида (7), либо уравнение вида (9).

*Шаг* 3. Дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на два случая.

*Случай* 1: квадрика задается уравнением вида (7). Здесь возможны два подслучая.

*Подслучай* 1.1: $C \neq 0$. В этом случае уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-C/A} + \frac{y^2}{-C/B} = 1. \tag{11}$$

Предположим сначала, что числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ больше нуля. Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$, мы получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если $a \geqslant b$, оно является каноническим уравнением эллипса. В противном случае мы получим тот же результат, сделав замену неизвестных (10).

Пусть теперь числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{C}{A} > 0$ и $-\frac{C}{B} < 0$ (в противном случае следует сделать замену неизвестных (10)). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{C}{B}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. каноническое уравнение гиперболы.

Наконец, если числа $-\frac{C}{A}$ и $-\frac{C}{B}$ меньше нуля, то уравнение (11) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

*Подслучай* 1.2: $C = 0$. При таком $C$ уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} = 0. \tag{12}$$

Если числа $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{B}$ имеют одинаковый знак, то уравнение (12) имеет единственное решение: $x = y = 0$. Следовательно, его геометрическим образом является точка (начало координат).

Пусть теперь числа $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{B}$ имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на $-1$, можно добиться выполнения неравенств $\frac{1}{A} > 0$ и $\frac{1}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{1}{B}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, которое можно переписать в виде $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0$. Оно задает совокупность прямых $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Очевидно, что главные векторы этих прямых,т. е. векторы $\vec{n}_1 = (\frac{1}{a}, -\frac{1}{b})$ и $\vec{n}_2 = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$, не пропорциональны. Следовательно, наши прямые пересекаются (см. теорему о взаимном расположении прямых на плоскости в § 15). Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть пара пересекающихся прямых.

*Случай* 2: квадрика задается уравнением вида (9). Здесь также возможны два подслучая.

*Подслучай* 2.1: $E \neq 0$. При таком $E$ уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (9) в виде

$$y^2 = -\frac{2E}{D}x - \frac{F}{D} = -\frac{2E}{D}\left(x + \frac{F}{2E}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{F}{2E}, \\ y' = y, \end{cases}$$

которая соответствует параллельному переносу системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $(-\frac{F}{2E}, 0)$. В новой системе координат квадрика имеет уравнение

$$(y')^2 = -\frac{2E}{D} \cdot x'.$$

Полагая $p = -\frac{E}{D}$, получаем уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, то оно является каноническим уравнением параболы. Если же $p < 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных

$$\begin{cases} x'' = -x', \\ y'' = y'. \end{cases}$$

*Подслучай 2.2:* $E = 0$. При таком $E$ уравнение (9) можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{F}{D}. \tag{13}$$

Если $-\frac{F}{D} > 0$, то, полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных прямых $y = a$ и $y = -a$.

Если $-\frac{F}{D} = 0$, то уравнение (13) имеет вид $y^2 = 0$ и определяет пару совпавших прямых.

Наконец, если $-\frac{F}{D} < 0$, то уравнение (13) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Мы завершили разбор всех возможных случаев и подслучаев. Как видим, в процессе этого разбора возникли все восемь видов квадрик, упомянутых в формулировке теоремы, и не возникло никаких других. Теорема полностью доказана. $\square$