§ 47. Классификация квадрик в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Этот параграф по своему содержанию аналогичен § 44. Его цель — указать все типы поверхностей второго порядка. Начнем с точного определения этого понятия.

Определение

Квадрикой в пространстве (или *поверхностью 2-го порядка*) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют *уравнению 2-го порядка с тремя неизвестными*, т. е. уравнению вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \; &+ \; 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ \; 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ и a_{23} отличен от нуля.

Примерами квадрик в пространстве являются девять поверхностей, упоминавшихся в § 45 и 46: эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Рассмотрим еще несколько уравнений вида (1) и выясним, какие квадрики они задают.

1) $x^2 - y^2 = 0$. Это уравнение задает *пару пересекающихся плоскостей* с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$.
2) $x^2 - 1 = 0$. Это уравнение задает *пару параллельных плоскостей* с уравнениями $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$.
3) $x^2 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $x = 0$ и потому задает плоскость. В теории квадрик в пространстве квадрику, задаваемую уравнением $x^2 = 0$, принято называть *парой совпавших плоскостей*. Этот термин объясняется так же, как термин «пара совпавших прямых» (см. § 44).
4) $x^2 + y^2 = 0$. Это уравнение равносильно равенствам $x = y = 0$ и потому задает в пространстве *прямую* (ось Oz).
5) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Это уравнение равносильно равенствам $x = y = z = 0$ и потому задает в пространстве *точку* (начало координат).
6) $x^2 + 1 = 0$. Ясно, что геометрическим образом этого уравнения является *пустое множество*.

Оказывается, что никаких других квадрик, кроме упомянутых на предыдущем слайде, не существует. А именно, справедлива следующая

Теорема о классификации квадрик в пространстве

Всякая квадрика в пространстве является или цилиндром (эллиптическим, гиперболическим или параболическим), или конусом, или эллипсоидом, или гиперболоидом (однополостным или двуполостным), или параболоидом (эллиптическим или гиперболическим), или парой плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпавших), или прямой, или точкой, или пустым множеством.

Доказательство. Пусть в системе координат $Oxyz$ квадрика σ задается уравнением (1). Нам предстоит в несколько шагов заменить систему координат так, чтобы максимально упростить это уравнение. Как и в случае квадрик на плоскости (см. § 44), этот процесс называется *приведением квадрики к каноническому виду*.

Шаг 1. На этом шаге мы хотим найти такую систему координат, в которой уравнение нашей квадрики не содержит произведений неизвестных (т. е. в которой все три коэффициента при таких произведениях равны 0).

Определение

Сумма слагаемых второй степени, входящих в уравнение (1), т. е. выражение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

называется *квадратичной формой старших членов* этого уравнения.

С учетом этого определения, цель первого этапа можно переформулировать так: найти систему координат, в которой квадратичная форма старших членов уравнения квадрики имела бы канонический вид.

Доказательство классификационной теоремы: приведение квадратичной формы старших членов к главным осям (1)

Обозначим квадратичную форму старших членов уравнения (1) через f. Чтобы достичь указанной на предыдущем слайде цели, приведем форму f к главным осям. Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям изложен в § 39. Его применение в описываемой ситуации имеет одну особенность: замену переменных $X = TY$, о которой идет речь в этом алгоритме, следует применять ко всей левой части уравнения (1), а не только к форме f. Уточним, что мы имеем в виду. Пусть $T = (t_{ij})$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Тогда замену $X = TY$ можно переписать в координатном виде:

$$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z', \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z', \\ z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'. \end{cases}$$

Приводя квадратичную форму f главным осям, правые части трех последних равенств надо подставлять во все слагаемые из (1), а не только в слагаемые формы f.

Доказательство классификационной теоремы: приведение квадратичной формы старших членов к главным осям (2)

Обозначим через A матрицу квадратичной формы f. После осуществления замены $X = TY$ мы получим, что в некоторой системе координат наша квадрика будет иметь уравнение вида (1), в котором матрица квадратичной формы старших членов диагональна. Обозначим эту матрицу через D. Тогда $D = T^{\top}AT$. Поскольку матрица T невырожденна, из следствия о ранге произведения квадратных матриц (см. § 27) вытекает, что $r(D) = r(A)$. Но матрица A ненулевая. Следовательно, $r(A) \neq 0$, откуда $r(D) \neq 0$, а значит и матрица D ненулевая. Таким образом, в уравнении квадрики в новой системе координат по крайней мере один из коэффициентов при квадратах переменных будет отличен от нуля. Отметим еще, что система координат, к которой мы перейдем, состоит из старого начала координат и того ортонормированного базиса пространства, состоящего из собственных векторов матрицы A, который будет найден в процессе приведения формы f к главным осям (именно векторы этого ортонормированого базиса записаны в столбцах матрицы T).

- Форму f можно привести к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (см. § 39), затратив при этом намного меньше сил и времени, чем при том способе решения задачи, который описан выше. После этого можно проделать шаги 2 и 3, описанные ниже, и довести уравнение квадрики до канонического вида. Но такой способ преобразования уравнения квадрики лишен геометрического смысла, поскольку уравнение, к которому он приводит, в общем случае не является уравнением исходной квадрики ни в какой системе координат. Поэтому при решении задач следует придерживаться алгоритма, описанного выше.

Шаг 2. В силу сказанного выше далее можно считать, что уравнение квадрики имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \qquad (2)$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22} и a_{33} отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Выделив полный квадрат по x, получим равенство

$$a_{11} \cdot \left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_2y + 2a_3z + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$. Сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases}$$

(геометрически ей соответствует сдвиг вдоль оси Ox), мы получим уравнение $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_2y' + 2a_3z' + a_0' = 0$, не содержащее линейного слагаемого по x. Аналогично, если $a_{22} \neq 0$ [соответственно $a_{33} \neq 0$], то сдвигом вдоль оси Oy [соответственно Oz] можно избавиться от линейного слагаемого по y [соответственно по z].

Доказательство классификационной теоремы: редукция к трем случаям (2)

Таким образом, можно считать, что если в уравнении (2) отличен от нуля коэффициент при квадрате некоторой неизвестной, то в нем нет линейного слагаемого по той же неизвестной. Если в (2) все три коэффициента при квадратах неизвестных отличны от 0, то мы пришли к уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \text{ где } A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0. \tag{3}$$

Если в (2) отличны от 0 ровно два коэффициента при квадратах неизвестных, то, сделав при необходимости соответствующую замену неизвестных, мы получим уравнение вида

$$Ex^2 + Fy^2 + 2Gz + H = 0, \text{ где } E \neq 0, F \neq 0. \tag{4}$$

Предположим, наконец, что в (2) отличен от 0 ровно один коэффициент при квадрате неизвестной. Можно считать, что этим коэффициентом является a_{22} (в противном случае можно сделать соответствующую замену неизвестных). Таким образом, уравнение квадрики имеет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{5}$$

где $a_{22} \neq 0$. Если $a_3 = 0$, мы пришли к уравнению вида

$$Ky^2 + 2Lx + M = 0, \text{ где } K \neq 0. \tag{6}$$

Если $a_1 = 0$, то мы придем к тому же результату, «переименовав» x в z, а z в x. Пусть, наконец, $a_1 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$.

Сделаем следующую замену неизвестных:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - z' \sin\alpha, \\ y = y', \\ z = x' \sin\alpha + z' \cos\alpha. \end{cases} \qquad (7)$$

Как показывают формулы (9) из § 14, эта замена соответствует повороту на угол α вокруг оси Oy. Подставив правые части равенств (7) вместо x, y и z в (5) и проведя необходимые преобразования, получим уравнение

$$a_{22}(y')^2 + 2(a_1 \cos\alpha + a_3 \sin\alpha)x' + 2(-a_1 \sin\alpha + a_3 \cos\alpha)z' + a_0 = 0,$$

где по-прежнему $a_{22} \neq 0$. Выбрав в качестве α решение уравнения $-a_1 \sin\alpha + a_3 \cos\alpha = 0$ (или, что эквивалентно, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1}{a_3}$), мы получим уравнение вида (6).

Итак, мы можем считать, что квадрика σ задается одним из уравнений (3), (4) и (6).

Шаг 3. Дальнейшие рассмотрения распадаются на три случая в зависимости от того, к какому из уравнений (3), (4) и (6) мы пришли.

Случай 1: квадрика задается уравнением вида (3). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 1.1: $D \neq 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-D/A} + \frac{y^2}{-D/B} + \frac{z^2}{-D/C} = 1. \tag{8}$$

Если числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ положительны, то, введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение эллипсоида.

Предположим теперь, что среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть два положительных и одно отрицательное. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{D}{A} > 0$, $-\frac{D}{B} > 0$ и $-\frac{D}{C} < 0$ (в противном случае следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

Пусть теперь среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть одно положительное и два отрицательных. Можно считать, что первые два из них отрицательны, а третье положительно (в противном случае, как и ранее, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим уравнение $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Умножив его на -1, получим каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

Наконец, если числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ отрицательны, то уравнение (8) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 1.2: $D = 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} + \frac{z^2}{1/C} = 0. \tag{9}$$

Если числа $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ имеют один и тот же знак, то уравнение (9) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и потому его геометрическим образом является точка (начало координат).

Пусть теперь среди чисел $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Умножив, если потребуется, уравнение (9) на -1, можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Более того, можно считать, что $\frac{1}{A} > 0$, $\frac{1}{B} > 0$ и $\frac{1}{C} < 0$ (в противном случае, как обычно, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим каноническое уравнение конуса.

Случай 2: квадрика задается уравнением вида (4). Здесь возможны три подслучая.

Подслучай 2.1: $G \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$Ex^2 + Fy^2 = -2Gz - H = -2G\left(z + \frac{H}{2G}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = z + \frac{H}{2G}, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Oz. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $E(x')^2 + F(y')^2 = -2Gz'$ или

$$\frac{(x')^2}{-G/E} + \frac{(y')^2}{-G/F} = 2z'. \qquad (10)$$

Предположим сначала, что числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют одинаковый знак. Если оба этих числа отрицательны, то, умножив уравнение (10) на -1, а затем сделав замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = -z'$, мы придем к уравнению того же вида, в котором $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} > 0$. Поэтому можно сразу считать, что выполнены два последних неравенства. Можно считать также, что $-\frac{G}{E} \geqslant -\frac{G}{F}$ (в противном случае можно переименовать x' в y', а y' в x'). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического параболоида.

Пусть теперь числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x'' = y'$, $y'' = x'$, $z'' = z'$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Подслучай 2.2: $G = 0$, $H \neq 0$. В этом случае уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-H/E} + \frac{y^2}{-H/F} = 1. \qquad (11)$$

Предположим, что числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ положительны. Можно считать, что $-\frac{H}{E} \geqslant -\frac{H}{F}$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического цилиндра.

Пусть теперь числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{H}{E} > 0$ и $-\frac{H}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического цилиндра.

Наконец, если числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ отрицательны, то уравнение (11) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 2.3: $G = H = 0$. В этом случае уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/E} + \frac{y^2}{1/F} = 0. \tag{12}$$

Предположим сначала, что числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют одинаковые знаки. Ясно, что в этом случае решениями уравнения (12) являются тройки чисел вида $(0, 0, z)$ (где z — любое число) и только они. Следовательно, это уравнение задает прямую (ось Oz).

Пусть теперь числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на -1, можно прийти к ситуации, когда $\frac{1}{E} > 0$ и $\frac{1}{F} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{1}{F}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) \cdot (\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 0$. Геометрическим образом последнего уравнения является совокупность плоскостей $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Очевидно, что главные векторы этих плоскостей, т. е. векторы $\vec{n}_1 = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0)$ и $\vec{n}_2 = (\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, 0)$, не пропорциональны. Следовательно, эти плоскости пересекаются (см. теорему о взаимном расположении плоскостей в § 16). Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть пара пересекающихся плоскостей.

Случай 3: квадрика задается уравнением вида (6). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 3.1: $L \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (6) в виде

$$y^2 = -\frac{2L}{K}x - \frac{M}{K} = -\frac{2L}{K}\left(x + \frac{M}{2L}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \frac{M}{2L}, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Ox. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $(y')^2 = -\frac{2L}{K}x'$. Полагая $p = -\frac{L}{K}$, получим уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, оно является каноническим уравнением параболического цилиндра. Если же $p < 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных $x'' = -x'$, $y'' = y'$, $z'' = z'$.

Подслучай 3.2: $L = 0$. Уравнение (6) в этом случае можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{M}{K}. \tag{13}$$

Если $-\frac{M}{K} > 0$, то, полагая $a = \sqrt{-\frac{M}{K}}$, мы получим уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных плоскостей $y = a$ и $y = -a$.

Если $-\frac{M}{K} = 0$, то уравнение (13), очевидно, эквивалентно уравнению $y = 0$, которое задает пару совпавших плоскостей.

Наконец, если $-\frac{M}{K} < 0$, то уравнение (13) не имеет решений и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Мы завершили разбор всех возможных случаев и подслучаев. Как видим, в процессе этого разбора возникли все пятнадцать видов квадрик, упомянутых в формулировке теоремы, и не возникло никаких других. Теорема полностью доказана. $\square$