Глава II. Системы линейных уравнений

§ 6. Строение общего решения системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Линейным уравнением (или *уравнением 1-го порядка*) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

Величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Произвольная система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

- Всюду далее мы будем предполагать, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены в системах линейных уравнений лежат в некотором (вообще говоря, произвольном) поле F и называть систему (2) *системой линейных уравнений над полем* F. Элементы поля F мы будем называть *скалярами*.

Частное и общее решение системы. Совместные и несовместные системы

Определение

Частным решением (или просто *решением*) системы (2) называется упорядоченный набор скаляров $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ из поля F такой, что при подстановке в любое уравнение системы (2) x_1^0 вместо x_1, x_2^0 вместо x_2, $\ldots$, x_n^0 вместо x_n получается верное равенство. Система линейных уравнений (2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной* в противном случае. *Общим решением* системы (2) называется множество всех ее частных решений.

- Общее решение есть у любой системы. В частности, у несовместной системы общим решением является пустое множество.
- Решить систему линейных уравнений – значит найти ее общее решение.

Как мы увидим в дальнейшем, во многих задачах, а также при анализе строения общего решения произвольной системы линейных уравнений важную роль играют системы, у которых правые части всех уравнений равны 0. Такие системы имеют специальное название.

Определение

Система линейных уравнений, в которой правые части всех уравнений равны 0, называется *однородной*.

Очевидно, что если в любое уравнение однородной системы вместо всех неизвестных подставить 0, то получится верное равенство. Иначе говоря, набор $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ раз}})$, где n — число неизвестных в системе, является частным решением любой однородной системы. Это решение называется *нулевым* решением. Из сказанного вытекает

Замечание о совместности однородной системы

Любая однородная система линейных уравнений совместна. $\square$

Определение

Если в системе (2) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

которую мы будем называть *однородной системой, соответствующей системе* (2).

Всякое частное решение системы линейных уравнений является упорядоченным набором скаляров. Поэтому следующее определение позволяет говорить о сумме частных решений системы и произведении частного решения системы на скаляр.

Определение

Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — два упорядоченных набора элементов поля F и $t \in F$. Тогда упорядоченный набор скаляров $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ называется *суммой наборов* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а упорядоченный набор $(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n)$ — *произведением набора* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *на скаляр* t.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема о строении общего решения системы линейных уравнений

1) *Сумма двух решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Произведение решения однородной системы линейных уравнений на скаляр является решением этой системы.*
2) *Пусть система* (2) *совместна, а* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — *некоторое ее частное решение. Набор скаляров* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *является решением этой системы тогда и только тогда, когда он равен сумме набора* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *и некоторого частного решения однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе* (2).

Иллюстрацией к п. 2) этой теоремы служит рис. 1.

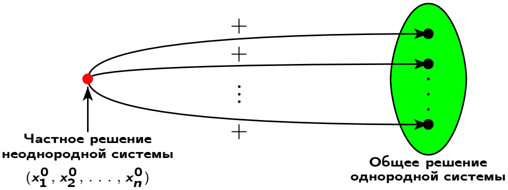

Рис. 1. Общее решение неоднородной системы

Доказательство. 1) Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — решения системы (3). Подставим наборы $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ и $(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n)$ в i-е уравнение этой системы $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим:

$$\begin{gathered}
a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \cdots + a_{in}(y_n + z_n) = \\
= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n) = 0 + 0 = 0 \quad \text{и} \\
a_{i1}(ty_1) + a_{i2}(ty_2) + \cdots + a_{in}(ty_n) = t(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) = t \cdot 0 = 0.
\end{gathered}$$

Мы видим, что наборы $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ и $(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n)$ являются решениями системы (3).

2) *Необходимость.* Пусть $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — частное решение однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе (2). Подставим набор $(x_1^0 + z_1, x_2^0 + z_2, \ldots, x_n^0 + z_n)$ в i-е уравнение системы (2) $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим:

$$\begin{gathered}
a_{i1}(x_1^0 + z_1) + a_{i2}(x_2^0 + z_2) + \cdots + a_{in}(x_n^0 + z_n) = \\
= (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n) = b_i + 0 = b_i.
\end{gathered}$$

Мы видим, что набор $(x_1^0 + z_1, x_2^0 + z_2, \ldots, x_n^0 + z_n)$ является решением системы (2).

Достаточность. Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — решение системы (2). Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $y_i = u_i - x_i^0$. Подставим полученный набор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в i-е уравнение системы (3) $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = a_{i1}(u_1 - x_1^0) + a_{i2}(u_2 - x_2^0) + \cdots + a_{in}(u_n - x_n^0) =$$
$$= (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) - (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0) = b_i - b_i = 0.$$

Это означает, что $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — решение системы (3). С другой стороны, $u_i = y_i + x_i^0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. набор $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ является суммой наборов $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. $\square$

Пункт 2) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений говорит о том, что набор скаляров принадлежит общему решению системы тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы некоторого ее фиксированного частного решения и набора скаляров, принадлежащего общему решению соответствующей однородной системы. В связи с этим указанное утверждение часто кратко (и не вполне точно) формулируют следующим образом:

- *общее решение системы линейных уравнений равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.*

Определение

Система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Следствие о числе решений неопределенной системы

Неопределенная система линейных уравнений над бесконечным полем имеет бесконечно много решений.

Доказательство. В силу п. 2) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений достаточно доказать следствие для однородных систем. Пусть (3) — неопределенная однородная система линейных уравнений над бесконечным полем F. Ясно, что у нее есть по крайней мере одно ненулевое решение, т. е. решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ такое, что $x_i^0 \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. В силу п. 1) теоремы о строении общего решения системы линейных уравнений набор $(tx_1^0, tx_2^0, \ldots, tx_n^0)$ является решением нашей системы при любом $t \in F$. Если $t_1, t_2 \in F$ и $t_1 \neq t_2$, то $t_1x_i^0 \neq t_2x_i^0$, и потому $(t_1x_1^0, t_1x_2^0, \ldots, t_1x_n^0)$ и $(t_2x_1^0, t_2x_2^0, \ldots, t_2x_n^0)$ — различные решения системы (3). Поскольку поле F бесконечно, бесконечно и число решений этой системы.