Комбинаторные алгоритмы

Пути в сетях: задача о максимальном пути и сетевые графики

Гальперин Александр Леонидович

2018 г.

Задача о максимальном пути формулируется следующим образом: *в заданной сети* $G = (V, E, c)$ *с выделенной вершиной* s *для каждой вершины* $v \in V$ *найти* (s, v)*–путь, имеющий максимальную длину среди всех возможных* (s, v)*– путей в сети* G.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Задача о максимальном пути формулируется следующим образом: *в заданной сети $G = (V, E, c)$ с выделенной вершиной s для каждой вершины $v \in V$ найти (s, v)–путь, имеющий максимальную длину среди всех возможных (s, v)– путей в сети G.*

NB

Отметим, что имеет смысл решать эту задачу лишь в сетях, не содержащих контуры положительной длины.

Построим сеть, отличающуюся от исходной только изменением знаков весов дуг. Очевидно, мы получим сеть без контуров отрицательной длины.

Применяя к новой сети алгоритм Форда–Беллмана, можно построить кратчайшие (s, v)–пути, которые будут путями максимальной длины в исходной сети.

Впрочем, задачу о максимальном пути в общем случае можно решать и непосредственно, заменяя в алгоритме Форда–Беллмана знак неравенства на противоположный. Разумеется, вес несуществующих дуг при этом следует положить равным $-\infty$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Важный частный случай сети с неотрицательными весами дуг, не имеющий контуров положительной длины, — это сеть с неотрицательными весами, в которой вообще нет контуров.

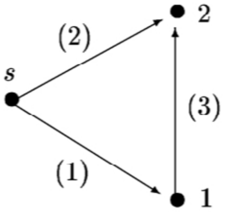
В этом частном случае задача о максимальном пути может быть решена алгоритмом из предыдущей лекции, в котором $+\infty$ заменяется на $-\infty$, а знак неравенства меняется на противоположный.

Корректность исправленного алгоритма доказать несложно. Попробуйте!

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

$\mathcal{NB}$



Отметим, что подобная замена знаков в алгоритме Дейкстры не позволяет получить алгоритм решения задачи о максимальном пути. Для примера достаточно рассмотреть сеть, изображенную на рисунке. Алгоритм Дейкстры неверно определит путь максимальной длины от вершины s до вершины 2.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Итак, алгоритм Форда–Беллмана и «безымянный алгоритм» из предыдущей лекции легко могут быть модифицированы для вычисления длин максимальных (s, v)–путей. Сами же пути с помощью меток $Previous[v]$ строятся так же, как и в алгоритме Форда–Беллмана.

$\mathcal{NB}$

Задача о максимальном пути в бесконтурной сети имеет большое практическое значение. Она является важным звеном в методах сетевого планирования работ по осуществлению проектов.

Многие крупные проекты, такие как строительство дома, изготовление станка, разработка автоматизированной системы бухгалтерского учета и т.д., можно разбить на большое количество различных операций (работ). Некоторые их них могут выполняться одновременно, другие — только последовательно: одна операция после окончания другой.

Например, при строительстве дома можно совместить по времени внутренние отделочные работы и работы по благоустройству территории. Однако, возводить стены можно только после того, как готов фундамент.

Задача планирования работ по осуществлению заданного проекта состоят:

- в определении времени возможного окончания всего проекта;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Задача планирования работ по осуществлению заданного проекта состоят:

- в определении времени возможного окончания всего проекта;
- в определении времени окончания отдельных работ, образующих проект;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Задача планирования работ по осуществлению заданного проекта состоят:

- в определении времени возможного окончания всего проекта;
- в определении времени окончания отдельных работ, образующих проект;
- в определении резервов времени для выполнения отдельных работ;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Задача планирования работ по осуществлению заданного проекта состоят:

- в определении времени возможного окончания всего проекта;
- в определении времени окончания отдельных работ, образующих проект;
- в определении резервов времени для выполнения отдельных работ;
- в определении *критических работ*, т.е. таких работ, задержка в выполнении которых ведет к задержке в выполнении всего проекта в целом;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Задача планирования работ по осуществлению заданного проекта состоят:

- в определении времени возможного окончания всего проекта;
- в определении времени окончания отдельных работ, образующих проект;
- в определении резервов времени для выполнения отдельных работ;
- в определении *критических работ*, т.е. таких работ, задержка в выполнении которых ведет к задержке в выполнении всего проекта в целом;
- в управлении ресурсами, если таковые имеются.

Здесь мы разберем основные моменты одного из методов сетевого планирования, называемого *методом критического пути*.

Метод был разработан в конце 1950–х годов компаниями DuPont и Remington Rand для управления работой химических заводов фирмы «Du Pont de Nemours» (США).

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Пусть некоторый проект W состоит из работ $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Пусть некоторый проект W состоит из работ $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Для каждой работы v_k известно (или может быть достаточно точно оценено) время ее выполнения $tm(v_k)$.

- Пусть некоторый проект W состоит из работ $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Для каждой работы v_k известно (или может быть достаточно точно оценено) время ее выполнения $tm(v_k)$.
- Для каждой работы v_k известен (возможно, пустой) список $Pred(v_k)$ работ, непосредственно предшествующих выполнению работы v_k. Иначе говоря, работа v_k может начать выполняться после завершения всех работ, входящих в список $Pred(v_k)$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Для удобства в список работ проекта W добавим две фиктивные работы s и t, где s обозначает начало всего проекта W, а работа t — завершение работ по проекту W.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Для удобства в список работ проекта W добавим две фиктивные работы s и t, где s обозначает начало всего проекта W, а работа t — завершение работ по проекту W.
- Будем считать, что работа s предшествует всем тем работам $v \in W$, для которых список $Pred(v)$ пуст. Т.е. для всех таких работ положим $Pred(v) = \{s\}$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Для удобства в список работ проекта W добавим две фиктивные работы s и t, где s обозначает начало всего проекта W, а работа t — завершение работ по проекту W.
- Будем считать, что работа s предшествует всем тем работам $v \in W$, для которых список $Pred(v)$ пуст. Т.е. для всех таких работ положим $Pred(v) = \{s\}$.
- Положим $Pred(s) = \varnothing$,

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Для удобства в список работ проекта W добавим две фиктивные работы s и t, где s обозначает начало всего проекта W, а работа t — завершение работ по проекту W.
- Будем считать, что работа s предшествует всем тем работам $v \in W$, для которых список $Pred(v)$ пуст. Т.е. для всех таких работ положим $Pred(v) = \{s\}$.
- Положим $Pred(s) = \varnothing$,
- $Pred(t) = \{v \in W | \forall w \in W \quad v \notin Pred(w)\}$, т.е. считаем, что работе t предшествуют те работы, которые могут выполняться последними.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

- Для удобства в список работ проекта W добавим две фиктивные работы s и t, где s обозначает начало всего проекта W, а работа t — завершение работ по проекту W.
- Будем считать, что работа s предшествует всем тем работам $v \in W$, для которых список $Pred(v)$ пуст. Т.е. для всех таких работ положим $Pred(v) = \{s\}$.
- Положим $Pred(s) = \varnothing$,
- $Pred(t) = \{v \in W | \forall w \in W \quad v \notin Pred(w)\}$, т.е. считаем, что работе t предшествуют те работы, которые могут выполняться последними.
- Время выполнения работ s и t естественно положить равными нулю: $tm(s) = tm(t) = 0$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Весь проект теперь представить в виде сети $G = (V, E, c)$, где сеть $G = (V, E, c)$ определяется по правилам:

1. $V = W$, т.е. множеством вершин объявляется множество работ;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Весь проект теперь представить в виде сети $G = (V, E, c)$, где сеть $G = (V, E, c)$ определяется по правилам:

1. $V = W$, т.е. множеством вершин объявляется множество работ;
2. $E = \{vw | v \in Pred(w)\}$, т.е. отношение предшествования задает дуги сети;

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Весь проект теперь представить в виде сети $G = (V, E, c)$, где сеть $G = (V, E, c)$ определяется по правилам:

1. $V = W$, т.е. множеством вершин объявляется множество работ;
2. $E = \{vw | v \in Pred(w)\}$, т.е. отношение предшествования задает дуги сети;
3. $c(v, w) = tm(w)$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Весь проект теперь представить в виде сети $G = (V, E, c)$, где сеть $G = (V, E, c)$ определяется по правилам:

1. $V = W$, т.е. множеством вершин объявляется множество работ;
2. $E = \{vw | v \in Pred(w)\}$, т.е. отношение предшествования задает дуги сети;
3. $c(v, w) = tm(w)$.

Так построенную сеть часто называют *сетевым графиком выполнения работ по проекту* W.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

$\mathcal{NB}$

Легко видеть, что списки смежностей этой сети $\overrightarrow{list}[v]$ совпадают с заданными для проекта списками предшествующих работ $Pred(v)$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

NB

Легко видеть, что списки смежностей этой сети $\overrightarrow{list}[v]$ совпадают с заданными для проекта списками предшествующих работ $Pred(v)$.

NB

Понятно, что сетевой график любого проекта не может содержать контуров.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

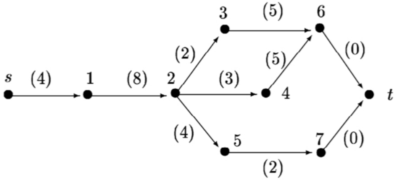
Отсутствие контуров в сети G позволяет пронумеровать работы проекта W таким образом, чтобы для каждой дуги ij сети G выполнялось условие $i < j$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что вершины в сети G топологически отсортированы.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

На рисунке приведен пример строительства дома и соответствующий сетевой график.

n	Наименование работы	Предшествующие работы	Время выполнения
1	Закладка фундамента	Нет	4
2	Возведение коробки здания	1	8
3	Монтаж электропроводки	2	2
4	Сантехмонтаж	2	3
5	Настил крыши	2	4
6	Отделочные работы	3, 4	5
7	Благоустройство территории	5	2



Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Конечной целью построения сетевой модели является получение информации о возможных сроках выполнения как отдельных работ, так и о возможном сроке выполнения всего проекта в целом.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Обозначим через $efin(v)$ (соответственно, $ebeg(v)$) *наиболее ранний возможный срок выполнения работы* v (соответственно, *наиболее ранний возможный срок начала работы* v).

Удобно считать, что

$$efin(s) = ebeg(s) = 0.$$

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Поскольку начать выполнять работу v можно только после того, как будут выполнены все работы, предшествующие данной работе v, то получаем следующие формулы для расчета значений $ebeg(v)$ и $efin(v)$:

$$ebeg(v) = \max\{efin(w) | w \in Pred(v)\},$$
$$efin(v) = ebeg(v) + tm(v).$$

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

$\mathcal{NB}$

Легко видеть, что $efin(v)$ равно длине максимального (s,v)–пути в сети G.

Поэтому для вычисления значений $efin(v)$ можно использовать алгоритм вычисления длин минимальных путей в бесконтурной сети, в котором все знаки неравенств заменены на противоположные.

При этом, значение $efin(t)$ дает наиболее ранний возможный срок завершения всего проекта в целом.

Ради полноты изложения приведем здесь формальную запись алгоритма, непосредственно вычисляющего характеристики *ebeg* и *efin*.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

(∗ расчет наиболее ранних возможных сроков начала и выполнения работ ∗)

Вход: сетевой график G работ V, заданный списками $Pred(v)$, $v \in V$.
Выход: наиболее ранние возможные сроки начала и выполнения работ $ebeg[v]$, $efin[v]$, $v \in V$.

```
begin
  for k := 0 to n+1 do  ebeg[k] := efin[k] := 0;
  for k := 1 to n+1 do
    begin
      for i ∈ Pred(k)  do
        ebeg[k] := max(efin[i], ebeg[k]);
      efin[k] := ebeg[k] + tm[k];
    end
end.
```

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

$\mathcal{NB}$

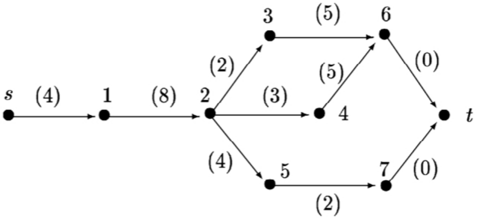
В этом алгоритме вершины сетевого графика обозначены, соответственно, через 0 и $n+1$.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Ниже приведены значения $ebeg(v)$ и $efin(v)$ для сетевого графика строительства дома. Из заданных значений следует, что этот проект не может быть завершен раньше, чем через 20 единиц времени.

Работы	ebeg	efin
0	0	0
1	0	4
2	4	12
3	12	14
4	12	15
5	12	16
6	15	20
7	16	18
8	20	20



Пусть T — плановый срок выполнения проекта W. Ясно, что T должно удовлетворять неравенству

$$efin(n+1) \leqslant T.$$

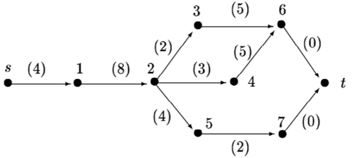
Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Через $lfin(v)$ (соответственно, $lbeg(v)$) обозначим *наиболее поздний допустимый срок выполнения (начала) работы* v, т.е. такой срок, который не увеличивает срок T реализации всего проекта.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики



3	12	14

Например, для работы 3 сетевого графика из рисунка

$$ebeg(3) = 12, efin(3) = 14,$$

но начать работу 3 можно на единицу времени позже (это не повлияет на срок исполнения проекта), а задержка в реализации на 2 единицы приведет к увеличению срока проекта на 1 единицу времени.

Непосредственно из определений получаем справедливость равенств

$$lbeg(n+1) = lfin(n+1) = T.$$

Непосредственно из определений получаем справедливость равенств

$$lbeg(n+1) = lfin(n+1) = T.$$

Поскольку произвольная работа v должна быть завершена до начала всех наиболее поздних допустимых сроков тех работ w, которым предшествует работа v, то получаем следующие формулы:

$$lfin(v) = \min\{lbeg(w) | v \in Pred(w)\},$$
$$lbeg(v) = lfin(v) - tm(v).$$

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Непосредственно из определений получаем справедливость равенств

$$lbeg(n+1) = lfin(n+1) = T.$$

Поскольку произвольная работа v должна быть завершена до начала всех наиболее поздних допустимых сроков тех работ w, которым предшествует работа v, то получаем следующие формулы:

$$lfin(v) = \min\{lbeg(w) | v \in Pred(w)\},$$
$$lbeg(v) = lfin(v) - tm(v).$$

Вычислить значения $lfin(v)$ и $lbeg(v)$ можно, двигаясь по вершинам сети G от $n+1$ до 0. Все детали вычислений — в следующем алгоритме.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

(* Расчет наиболее поздних сроков начала и окончания работ *)
Вход: сетевой график G работ V, заданный списками $Pred[v]$, $v \in V$, плановый срок окончания проекта — T.
Выход: наиболее поздние допустимые сроки выполнения и начала работ $lfin[v]$ и $lbeg[v]$.

```
begin
  for v ∈ V  do  lfin[v] := T;
  for k := n + 1 downto 1 do
    begin
      lbeg[k] := lfin[k] − tm(k);
      for i ∈ Pred(v)   do
        lfin[i] := min(lfin[i], lbeg[k]);
    end
end.
```

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Найденные значения возможных сроков выполнения работ позволяют определить резервы времени для выполнения той или иной работы.

В сетевом планировании рассматривают несколько различных и по–своему важных видов резерва работ. Мы здесь ограничимся лишь *полным резервом* (иногда его называют *суммарным*) временем выполнения работ. Он определяется по формуле:

$$reserve(v) = lbeg(v) - ebeg(v).$$

Значение $reserve(v)$ равно максимальной задержке в выполнении работы v, не влияющей на плановый срок T.

Понятно, что справедливо и соотношение

$$reserve(v) = lfin(v) - efin(v).$$

Работы, имеющие нулевой резерв времени, называются *критическими*. Через каждую такую работу проходит некоторый максимальный (s, t)–путь в сети G. Поэтому такой метод нахождения критических работ и называют *методом критического пути*.

Работы, имеющие нулевой резерв времени, называются *критическими*. Через каждую такую работу проходит некоторый максимальный (s, t)–путь в сети G. Поэтому такой метод нахождения критических работ и называют *методом критического пути*.

Критические работы характеризуются тем, что любая задержка в их выполнении автоматически ведет к увеличению времени на выполнение всего проекта.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Численные значения введенных характеристик сетевых графиков для проекта строительства дома приведены ниже на рисунке. Расчеты выполнены при $T = 20$. Критическими работами этого проекта являются работы с номерами 0, 1, 2, 4, 6, 8, которые и образуют в сети G критический путь.

Пути в сетях

Задача о максимальном пути и сетевые графики

Работы	ebeg	efin	lbeg	lfin	reserve
0	0	0	0	0	0
1	0	4	0	4	0
2	4	12	4	12	0
3	12	14	13	15	1
4	12	15	12	15	0
5	12	16	14	18	2
6	15	20	15	20	0
7	16	18	18	20	2
8	20	20	20	20	0