Дифференциальные уравнения (III-IV семестры)

Базовые учебники и задачники.

1. **Шолохович Ф.А.** Лекции по дифференциальным уравнениям (университетский курс). — Екатеринбург : Уральское изд-во, 2005. — 232 с.

2. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. 5-е изд. — М.: Наука, 1950. — 460 с.

3. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

4. **А.Ф. Филиппов** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.:Наука, 1992.

http:\\lib.usu.ru   электронный каталог УрГУ

§0. Основные понятия. Примеры.

Дифференциальным называют уравнение, связывающее независимые переменные, искомые функции и производные от искомых функций.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется такое уравнение, в котором искомые функции зависят лишь от одной независимой переменной.

Уравнения, содержащие частные производные функций, зависящих от нескольких переменных называют **уравнениями в частных производных**).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Общий вид ОДУ n–ого порядка с одной искомой функцией:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

здесь y — искомая функция аргумента x, а F – известная функция от $(n + 2)$-х аргументов.

Решением уравнения (1) в интервале (α, β) называется функция $y = y(x)$, обращающая это уравнение в тождество в интервале (α, β).

Замечание. Определение решения включает в себя требование возможности его подстановки в уравнение (1), в частности, у функции $y = y(x)$ должны существовать все производные до порядка n включительно на интервале (α, β).

Примеры ОДУ.

1. Известную из математического анализа задачу отыскания всех первообразных данной функции f можно записать в виде уравнения

$$y' = f(x), \tag{2}$$

где f - заданная функция, $y = y(x)$ - неизвестная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$; оно представляет собой простейший пример ОДУ. Как доказывается в интегральном исчислении, если f непрерывна на некотором промежутке, то уравнение (2) имеет на нем бесконечное семейство решений, которое задается формулой

$$y = F(x) + C;$$

здесь F - какая-нибудь фиксированная первообразная функции f, а параметр C пробегает все действительные значения.

2. Замечательным свойством функции $y = e^x$ является то, что она совпадает со своей производной; это свойство записывается в виде ОДУ

$$y' = y, \tag{3}$$

решениями которого, наряду с e^x, будут все функции семейства

$$y = C\,e^x,$$

где C пробегает все действительные значения.

3. На тело (материальную точку) массы m, падающее по вертикальной прямой, принятой за ось Oy, действует сила тяжести $F = mg$. Если $y = y(t)$ есть координата точки в момент времени t, то по закону Ньютона ($m\overline{w} = \overline{F}$, где $\overline{w}$ — ускорение, $\overline{F}$ — сила)

$$my'' = mg,$$

или

$$y'' = g, \tag{4}$$

где y'' — ускорение движущейся точки. Уравнение (4) является ОДУ второго порядка с искомой функцией $y(t)$, разрешенное относительно старшей производной. Легко проверить подстановкой в уравнение (4), что его решением является всякая функция

$$y = \frac{1}{2}g\,t^2 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные числа.

4. Модель роста населения (демографический процесс). Из статистических данных известно, что для некоторого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_p и k_c соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени.

Отвлекаясь от того, что численность населения может измеряться только целыми числами, обозначим $y = y(t)$ – число жителей региона в момент времени t. Прирост населения за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е.

$$\Delta y = k_p y(t)\Delta t - k_c y(t)\Delta t.$$

Разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky, \qquad k = k_p - k_c.$$

Перейдем в равенстве

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$y' = ky.$$

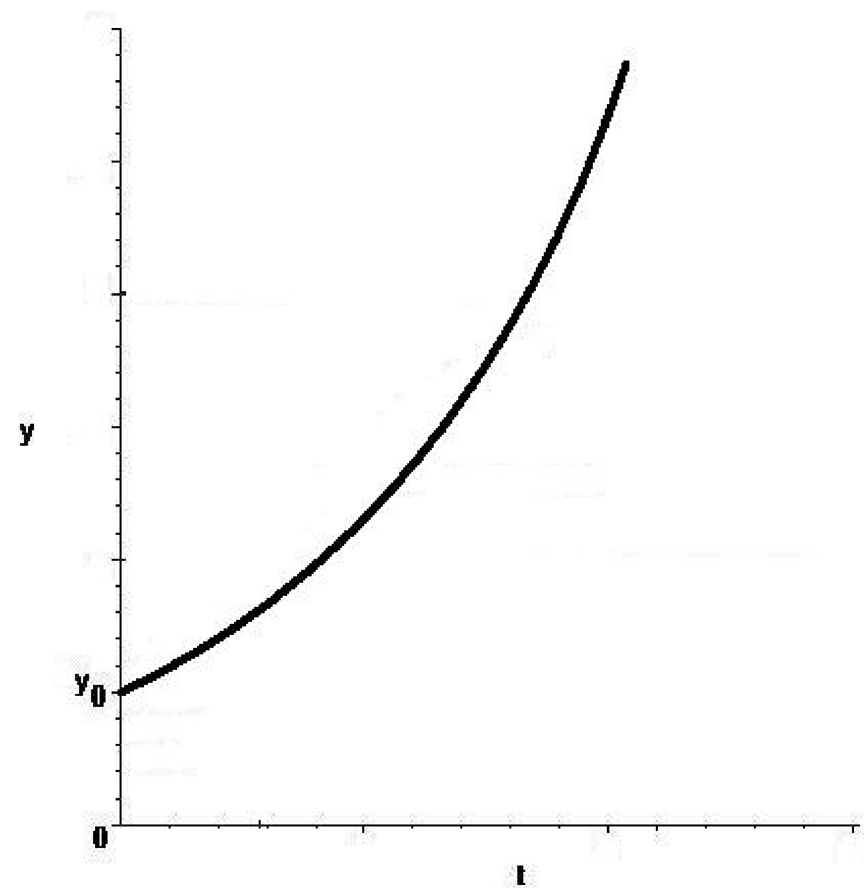
Подобное уравнение было получено **Мальтусом** и называется **уравнением мальтузианского роста**. Его решение (как можно убедиться непосредственной подстановкой) дается множеством функций

$$y = C\,e^{kt},$$

где C – произвольное действительное число. Если известно, что в начальный момент времени $t = 0$ численность населения составляла величину y_0, то зависимость численности населения от времени определяется формулой

$$y(t) = y_0\,e^{kt}.$$

График этой функции $y(t) = y_0\, e^{kt}$ при положительном коэффициенте k представлен на рисунке. Анализируя эту зависимость, можно прогнозировать рост численности населения в зависимости от коэффициента естественного прироста и времени.



5. Эффективность рекламы. Средства массовой информации объявили о поступлении в магазины города нового товара. В начальный момент времени $t = 0$ это известие дошло до N_1 человек из числа N потенциальных покупателей товара. Нужно найти функцию $x = x(t)$, которая определяла бы число $x(t)$ покупателей, узнавших о поступлении товара в момент времени t.

Экономисты считают правдоподобной гипотезу: скорость $\frac{dx}{dt}$ распространения рекламы (хотя бы «из уст в уста») пропорциональна как $x(t)$, так и числу людей $N - x(t)$, еще не знающих о поступлении товара. Коэффициент пропорциональности обозначим буквой k. Получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x). \tag{5}$$

△

Мы видим, что, как правило, ОДУ имеет бесконечно много решений. Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется **интегрированием** ОДУ (так как почти всегда для нахождения решения ОДУ приходится находить некоторые первообразные).

Уравнения 1-го порядка

§1. Основные определения. Изучение теории ОДУ начнем с ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. уравнений вида

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Рассмотрим простой пример $y' = x^2$. Решить его – это то же самое, что найти первообразную для функции x^2. Таким образом, $y = \frac{x^3}{3} + C$. Решения этого уравнения образуют целое множество функций, зависящее от параметра C; такое множество называется **общим решением**. Чтобы из этого семейства решений выделить одно, частное решение, задают начальное условие. Например, $y(0) = 1$; находим $C = 1$, в данном случае частное решение $y = \frac{x^3}{3} + 1$.

Вернемся к уравнению (1) и дадим несколько определений.

Для ОДУ $y' = f(x, y)$ (1) условие вида $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием**, а задача нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

называется **задачей Коши** (или начальной задачей).

Фундаментальным результатом теории ОДУ является следующая теорема.

Теорема существования и единственности. Пусть функция

$f(x, y)$ и частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области Γ плоскости (x, y), точка (x_0, y_0) лежит в Γ. Тогда

1. Существование. В некоторой окрестности $|x - x_0| \leqslant \delta$ точки x_0 существует решение задачи Коши (2).

2. Единственность. Если $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ — два решения задачи Коши (2), то $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть область Γ на плоскости переменных x, y будет той областью, в каждой точке которой выполнены условия теоремы существования и единственности.

Семейство функций

$$y = \varphi(x, C), \tag{3}$$

зависящее от параметра C, называется **общим решением** уравнения (1) в области Γ, если

1. для любой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ существует такое значение параметра C_0, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$;
2. для любого значения параметра C_0 из 1 функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ОДУ (1).

Решение, получающееся из формулы общего решения (3) при конкретном значении произвольной постоянной C, называется **частным** решением уравнения (1).

Знание общего решения $y = \varphi(x, C)$ (3) дает возможность решить задачу Коши с любыми начальными данными (x_0, y_0) из области Γ за счет выбора соответствующего значения произвольной постоянной C.

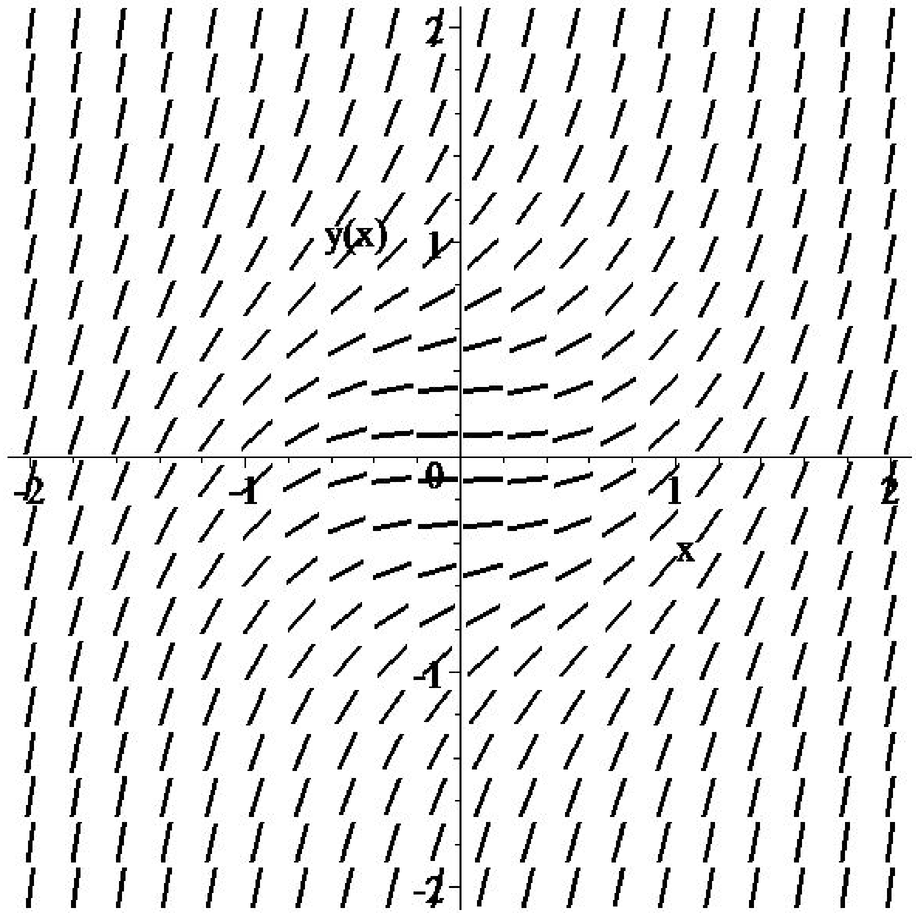
§2. Геометрическая интерпретация ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной $y' = f(x, y)$ (1).

График решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) называется его **интегральной кривой**.

Кривая на плоскости (x, y) является интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда в любой точке (x_0, y_0) этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$.

Таким образом, зная правую часть уравнения (1), мы можем заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках: для этого каждой точке (x_0, y_0) области Γ нужно сопоставить проходящую через нее прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Полученное соответствие между точками плоскости и проходящими через нее прямыми называется **полем направлений** уравнения (1).

Конечно, фактически поле направлений можно построить лишь в виде достаточно густой сетки отрезков с отмеченными на них точками (см. рис.). После этого задача построения интегральных кривых становится похожей на отыскание нужного пути в большом парке, снабженном густой сетью стрелок-указателей.



Задача Коши с геометрической точки зрения заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема существования и единственности утверждает, что через каждую точку области Γ, в которой непрерывны $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, проходит интегральная кривая, и притом единственная.

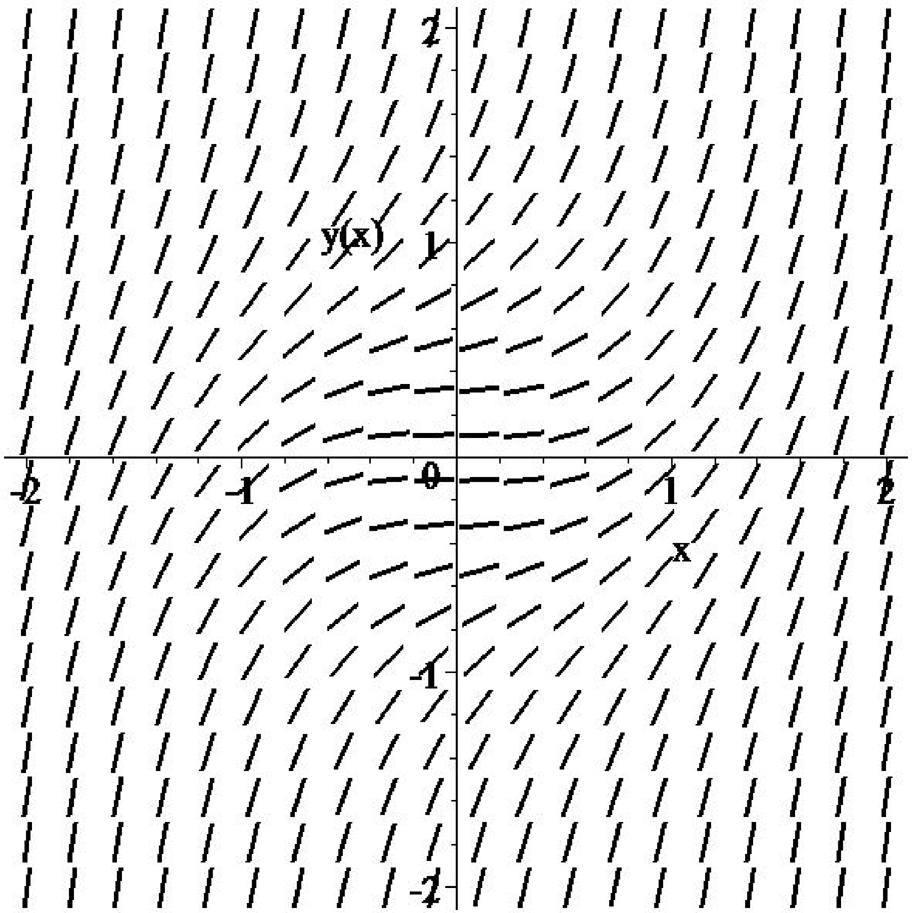


Рис. 1.

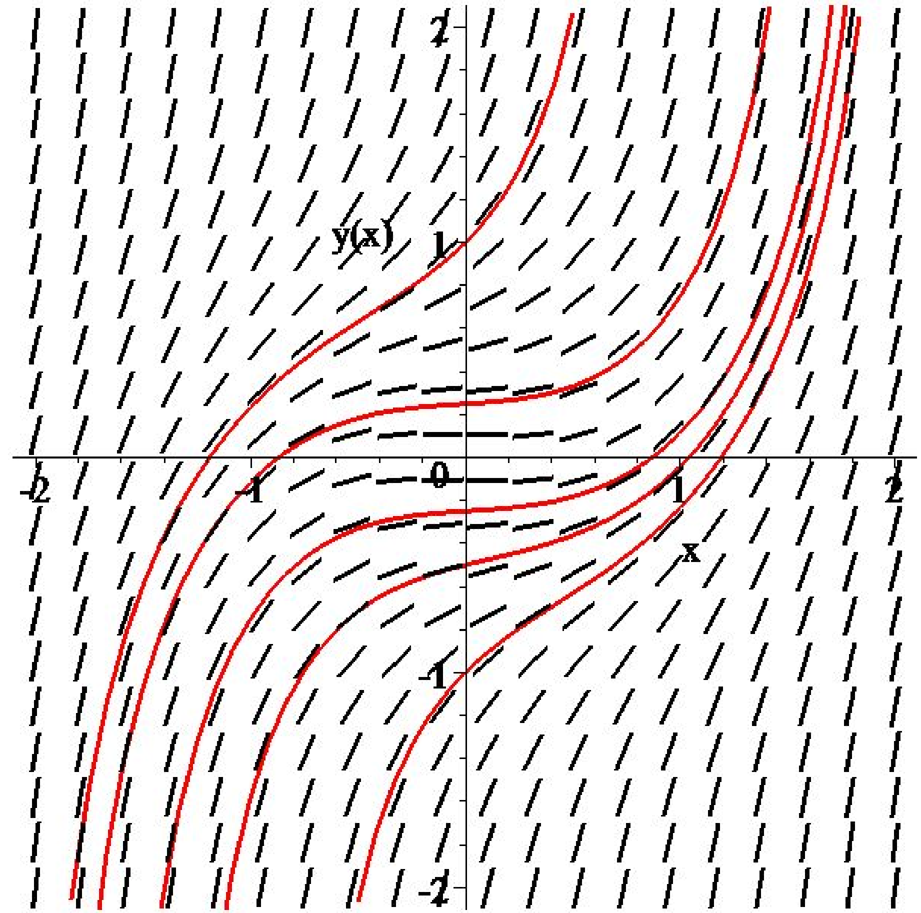


Рис. 2.

Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Замечание. Вместо уравнения $y' = f(x, y)$ (1) можно рассматривать уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{4}$$

записанное **в дифференциальной форме**, оно содержит дифференциалы искомой функции и независимой переменной. Вообще говоря, здесь переменные x и y являются равноправными, поэтому рассматривают зависимости как y от x, так и x от y.

Уравнение (4) может быть получено из уравнения (1) следующим образом: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, или $f(x, y)dx - dy = 0$.

Обратно, там, где $N(x, y) \neq 0$ уравнение (1) преобразуется к виду (4).

Лишь немногие обыкновенные дифференциальные уравнения допускают интегрирование в квадратурах т. е. выражение общего решения через элементарные функции и интегралы от них.

Термин "квадратура" означает взятие неопределенного интеграла и объясняется тем, что интегралами выражают площади фигур, а задача вычисления площади фигуры с древних времен называлась квадрированием (например, "квадратура круга").

Уравнение $y' = f(x, y)$ (1) в общем случае не интегрируется, т.е. нет способа нахождения решения при произвольной функции $f(x, y)$. Поэтому приходится рассматривать такие частные виды этой функции, при которых можно указать способ решения. Такие уравнения относят к интегрируемым типам.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{5}$$

где функция, стоящая в правой части, есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y, называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

$$\Gamma: \qquad a < x < b, \qquad c < y < d$$

Если при некотором $\overline{y} \in (c, d)$ выполняется $g(\overline{y}) = 0$, то функция $y \equiv \overline{y}$ является решением уравнения (5), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

В дальнейшем будем считать, что $g(y) \neq 0$, $y \in (c, d)$.

Запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение этого уравнения на некотором промежутке $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ и $c < \varphi(x) < d$, тогда выполняется тождество

$$\frac{d(\varphi(x))}{dx} = f(x)g(\varphi(x)).$$

Поскольку мы предположили, что $g(y) \neq 0$ на (c, d), и $c < \varphi(x) < d$, то

$$\frac{d(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = f(x)dx \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут отличаться лишь на константу:

$$\int \frac{d(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \int f(x)dx + C. \tag{6}$$

Далее при замене переменной в неопределенном интеграле по формуле $y = \varphi(x)$ получим:

$$\int \frac{d(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) = G(\varphi(x)) =$$

$$= \int f(x)dx + C = F(x) + C,$$

где $G(y)$ — одна из первообразных функции $1/g(y)$, а $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

Тем самым, функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$G(y) = F(x) + C \tag{7}$$

при подходящем значении произвольной постоянной.

Уравнение $G(y) = F(x) + C$ (7) имеет вид $H(x, y, C) = 0$. Оно не содержит ни производных, ни дифференциалов и при фиксированном C определяет y как неявную функцию x.

Уравнение $H(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявной форме, называют **общим интегралом**. При конкретном значении C соотношение $H(x, y, C) = 0$ называется **частным интегралом**.

Вопросы:

1. Пусть $(x_0, y_0) \in \Gamma$ и $g(y_0) \neq 0$. Определим постоянную $\overline{C} = G(y_0) - F(x_0)$. Почему соотношение $G(y) = F(x) + \overline{C}$ определяет явно функцию $y(x)$ в окрестности точки (x_0, y_0)?

2. Почему эта функция $y(x)$ является решением уравнения

$y' = f(x)g(y)$?

Этапы решения уравнения с разделяющимися переменными $y' = f(x)g(y)$:

1. Записываем производную как отношение дифференциалов:
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$
2. Разделяем переменные $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ при условии $g(y) \neq 0$.
3. Навешиваем интегралы $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$, получаем общий интеграл.
4. Если $g(\overline{y}) = 0$, находим решения $y \equiv \overline{y}$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1.$$

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1.$ $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$, где $C_1 = \ln C_2$, $(C_2 > 0)$

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1.$ $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$, где $C_1 = \ln C_2$, $(C_2 > 0)$

Находим $|y| = C_2|x|$,

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1. \ \ \ln|y| = \ln|x| + \ln C_2,$$ где $C_1 = \ln C_2, \ \ (C_2 > 0)$

Находим $|y| = C_2|x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_2 x$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1.$ $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$, где $C_1 = \ln C_2$, $(C_2 > 0)$

Находим $|y| = C_2|x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_2 x$.

Или $y = Cx, \quad C \neq 0$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1.$ $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$, где $C_1 = \ln C_2$, $(C_2 > 0)$

Находим $|y| = C_2|x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_2 x$.

Или $y = Cx, \quad C \neq 0$.

$y \equiv 0$ — решение уравнения, входит в семейство $y = Cx$ при $C = 0$.

Пример. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}$.

Запишем производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1$. $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2$, где $C_1 = \ln C_2$, $(C_2 > 0)$

Находим $|y| = C_2|x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_2 x$.

Или $y = Cx, \quad C \neq 0$.

$y \equiv 0$ — решение уравнения, входит в семейство $y = Cx$ при $C = 0$.

Общее решение $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2,$$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0,$$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0, \qquad -\frac{1}{y} = kt + C,$$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0, \qquad -\frac{1}{y} = kt + C, \quad y \equiv 0.$$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0, \qquad -\frac{1}{y} = kt + C, \quad y \equiv 0.$$

Решим задачу Коши с начальным условием $y(0) = y_0 \neq 0$:

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0, \qquad -\frac{1}{y} = kt + C, \quad y \equiv 0.$$

Решим задачу Коши с начальным условием $y(0) = y_0 \neq 0$:

$$C = -\frac{1}{y_0},$$

Пример. Уравнение взрыва. Физико-химические задачи: скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов:

$$y' = ky^2, \qquad k > 0.$$

Р е ш е н и е.

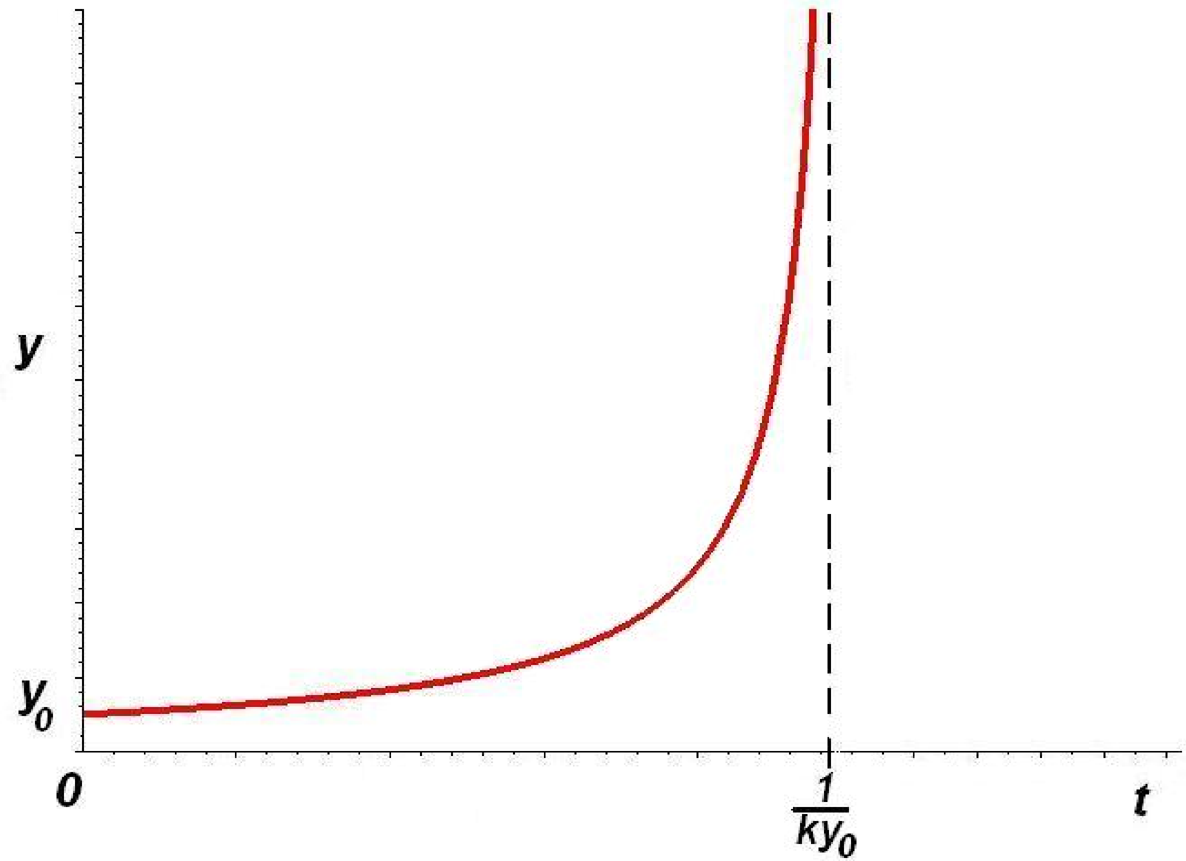
$$\frac{dy}{dt} = ky^2, \qquad \frac{dy}{y^2} = kdt, \quad y \neq 0, \qquad -\frac{1}{y} = kt + C, \quad y \equiv 0.$$

Решим задачу Коши с начальным условием $y(0) = y_0 \neq 0$:

$$C = -\frac{1}{y_0},$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{ky_0} - t}.$$

Количество вещества становится бесконечным за конечное время: интегральная кривая решения с начальным условием $y_0 \neq 0$ имеет вертикальную асимптоту (момент взрыва) $t = \dfrac{1}{ky_0}$.



Замечание. Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называют уравнением с разделяющимися переменными, если его коэффициенты M и N представимы в виде

$$M(x,y) = M_1(x) \cdot M_2(y); \quad N(x,y) = N_1(x) \cdot N_2(y).$$

Рассмотрим способ решения уравнения

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{8}$$

Сначала предположим, что $M_2(y) \neq 0$ и $N_1(x) \neq 0$. Поделим обе части (8) на произведение $M_2(y)N_1(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy.$$

Интегрируем обе части, получим

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy + C.$$

Пусть теперь $M_2(\overline{y}) = 0$. Непосредственной подстановкой в уравнение (8) убеждаемся, что функция $y \equiv \overline{y}$ является решением (дифференциал функции $y \equiv \overline{y}$ равен 0). Аналогично, когда искомой является функция x, $x \equiv \overline{x}$ будет решением уравнения (8), если $N_1(\overline{x}) = 0$.

Пример. $(y^2 - 1)dx + 2xydy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1};$$

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1}; \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2ydy}{y^2-1} + C_1.$$

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1}; \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2ydy}{y^2-1} + C_1.$$

Вычисляя интегралы, получаем

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1}; \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2ydy}{y^2-1} + C_1.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\ln|x| + \ln|y^2-1| = \ln C_2,$$

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x \neq 0$ и $y^2 \neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2ydy}{y^2-1}; \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2ydy}{y^2-1} + C_1.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\ln|x| + \ln|y^2-1| = \ln C_2, \qquad x(y^2-1) = C.$$

Пример. $(y^2-1)dx+2xydy=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Считая $x\neq 0$ и $y^2\neq 1$, разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2ydy}{y^2-1};\qquad \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2ydy}{y^2-1}+C_1.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\ln|x|+\ln|y^2-1|=\ln C_2,\qquad x(y^2-1)=C.$$

Кроме этого, в случае $y=y(x)$ есть решения $y=1, y=-1$, (если $x=x(y)$, то $x=0$ – решение).

$\triangle$

§4. Однородные уравнения

Многие типы уравнений сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. К ним относятся **однородные уравнения**.

Определение: функция $f(x, y)$ есть **однородная функция** m-**ого измерения**, если для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Однородным называют уравнение $y' = f(x, y)$, в котором функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию $f(tx, ty) = f(x, y)$, т.е. является однородной функцией нулевого измерения. Заменяя в последнем равенстве t на $\frac{1}{x}$, получим $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}) = \Phi(\frac{y}{x})$. Следовательно, уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Применим замену переменной: введем новую искомую функцию $u(x)$ вместо $y(x)$ по формуле $y = ux$. Замена $u = \frac{y}{x}$ предполагает, что x не обращается в нуль.

Относительно функции $u(x)$ получится уравнение $\dfrac{du}{dx}x + u = \Phi(u)$ или

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(u) - u, \tag{10}$$

а это уравнение с разделяющимися переменными.

Имеются три возможности:

1. $\Phi(u)-u \neq 0$, дело сводится к интегрированию уравнения $\frac{du}{\Phi(u)-u} = \frac{dx}{x}$ с разделяющимися переменными.

2. При некоторых значениях $u = \overline{u}$, $\Phi(\overline{u}) - \overline{u} = 0$. Очевидно, функция $u = \overline{u}$ является решением уравнения $x\frac{du}{dx} = \Phi(u) - u$ (10),
а $y = \overline{u}x$ — решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ (9).

3. $\Phi(u) - u \equiv 0$, а это означает ,что $\Phi(u) \equiv u$, или $\Phi(\frac{y}{x}) \equiv \frac{y}{x}$; Уравнение (9) принимает вид $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, и $y = Cx$ — его общее решение.

На однородном уравнении прослеживается тенденция, характерная для интегрирования многих типов дифференциальных уравнений:

тем или иным способом уравнение нового типа преобразуется к типу, уже изученному.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u,$

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$,

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$, или $u^2 = 2\ln|x| + \ln C$,

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$, или $u^2 = 2\ln|x| + \ln C$, или $y^2 = x^2 \ln(Cx^2)$ – общий интеграл.

Пример. $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$. Придадим уравнению вид

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

В правой части стоит однородная функция нулевого измерения. Делаем замену $y = ux$.

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u$, или $udu = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C_1$, или $u^2 = 2\ln|x| + \ln C$, или $y^2 = x^2\ln(Cx^2)$ – общий интеграл.

Замечание. ОДУ вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

называется однородным, если M и N – однородные функции одного и того же измерения m. Для его интегрирования нет необходимости приводить его к виду (9), можно применить подстановку $y = ux$ и получить уравнение с разделяющимися переменными.

§5. Линейные уравнения.

Здесь рассматриваются ОДУ 1-го порядка, линейные относительно неизвестной функции и ее производной.

Общий вид линейного уравнения 1-го порядка следующий:

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{11}$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ считаются непрерывными в промежутке (α, β). Легко заметить, что это требование обеспечивает выполнение условий теоремы Коши в полосе, задаваемой неравенствами

$$\Gamma: \qquad \alpha < x < \beta, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Если $b(x) \equiv 0$, уравнение (11) называют линейным однородным. В противном случае – неоднородным.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0. \qquad (12)$$

называют линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (11).

Замечание. Обратите внимание, что линейное однородное ОДУ НЕ является ОДНОРОДНЫМ ОДУ в смысле предыдущего параграфа.

Сначала проинтегрируем однородное уравнение (12). Полагая $y \neq 0$, разделяем переменные $\frac{dy}{y} = -a(x)dx$;

$$\ln|y| = -\int a(x)dx + \ln|C| \qquad (C \neq 0), \qquad \text{или} \qquad y = Ce^{-\int a(x)dx}.$$

Кроме этого, имеется решение $y \equiv 0$, называемое тривиальным. Чтобы объединить оба решения одной формулой, разрешается произвольной постоянной C принимать значение нуль.

Переходим к решению неоднородного уравнения. Применим метод вариации произвольной постоянной, предложенный Лагранжем. В методе Лагранжа сначала находится общее решение однородного уравнения $y = Ce^{-\int a(x)dx}$, а затем постоянная C заменяется функцией аргумента x, т. е. превращается в переменную величину, варьируется. Выражение

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx} \tag{13}$$

подставляем в неоднородное уравнение, после чего находится неизвестная вначале функция $C(x)$. Производную y' вычисляем как производную произведения двух функций:

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x).$$

Отсюда $\frac{dC}{dx}e^{-\int a(x)dx} = b(x)$, следовательно,

$\frac{dC}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}$ и $C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + D$,
где D – произвольная постоянная.

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в формулу (13), получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y = De^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int\left(b(x)e^{\int a(x)dx}\right)dx. \tag{14}$$

Запоминать следует не формулу (14), а метод Лагранжа.

Замечание. Каждое решение уравнения (11) определено на всем промежутке (α, β).

Замечание. Формула (14) показывает, что общее решение линейного неоднородного ОДУ есть сумма общего решения линейного однородного, соответствующего данному неоднородному, и какого-нибудь частного решения исходного неоднородного ОДУ.

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3.$

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3.$

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0.$

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$;

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$;

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$;

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $\quad y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Шаг 2. Считая C функцией x, подставляем полученное выражение в исходное уравнение:

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $\quad y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Шаг 2. Считая C функцией x, подставляем полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = x^3, \text{ или}$$

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3.$

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx;\quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2dx}{x};\quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C;\quad y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Шаг 2. Считая C функцией x, подставляем полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C\cdot 2x - \frac{2}{x}\cdot Cx^2 = x^3, \text{ или } \frac{dC}{dx}x^2 = x^3.$$

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $\quad y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Шаг 2. Считая C функцией x, подставляем полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = x^3, \text{ или } \frac{dC}{dx}x^2 = x^3.$$

В заданном уравнении x находится в знаменателе, следовательно, предполагается, что $x \neq 0$, поэтому можно сократить на x^2.

Получаем $\frac{dC}{dx} = x$; $\quad C = \frac{1}{2}x^2 + D$.

Пример. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Шаг 1. Решаем однородное уравнение $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Разделяем переменные $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$; $\quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$; $\quad y = Cx^2$ (при $C = 0$ получается тривиальное решение $y \equiv 0$).

Шаг 2. Считая C функцией x, подставляем полученное выражение в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = x^3, \text{ или } \frac{dC}{dx}x^2 = x^3.$$

В заданном уравнении x находится в знаменателе, следовательно, предполагается, что $x \neq 0$, поэтому можно сократить на x^2.

Получаем $\frac{dC}{dx} = x$; $\quad C = \frac{1}{2}x^2 + D$.

$$\text{Ответ: } y = Dx^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

$\triangle$

§6. Уравнение Бернулли

Общий вид этого уравнения

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \tag{15}$$

где n может быть любым вещественным числом. Функции $a(x)$ и $b(x)$ предполагаются непрерывными в промежутке (α, β).

Исключим случаи $n = 1$ и $n = 0$, так как при этих значениях n уравнение (15) превращается в однородное или неоднородное линейное уравнение.

Разделим обе части уравнения (15) на y^n, полагая $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x).$$

Вводя новую искомую функцию $z = y^{1-n}$, получим линейное уравнение $\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x)$.

Пример. Решим уравнение $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Это уравнение Бернулли с $n = \frac{1}{2}$. Делим обе части уравнения на $\sqrt{y}$ в предположении $y \neq 0$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводим новую переменную $z = \sqrt{y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx}$, подставляем в уравнение

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Получили линейное неоднородное уравнение относительно функции z, решим соответствующее однородное:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \qquad \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C, \qquad z = Cx^2.$$

Варьируем постоянную $C = C(x)$:

$$C'x^2 + 2xC - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = \frac{x}{2}, \qquad \text{или} \qquad C' = \frac{1}{2x}, \qquad C = \frac{1}{2}\ln|x| + D.$$

Следовательно,

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + D\right).$$

Возвращаемся к переменной $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + D\right)^2$. Кроме того, есть еще решение $y = 0$.

$\triangle$

Пример. Заметим, что рассмотренная ранее модель эффективности рекламы (см. пример 11 первой лекции) описывается уравнением Бернулли:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x), \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{dt} - kN\,x = -k\,x^2.$$

Если в начальный момент времени о новом товаре знало N_1 человек, т.е. $x(0) = N_1$, то решение имеет вид

$$x = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{N_1} - 1\right) e^{-kNt}} \tag{16}$$

Второе слагаемое знаменателя стремится к нулю при $t \to \infty$, поэтому $x \to N$.

График функции (16) – логистическая кривая.

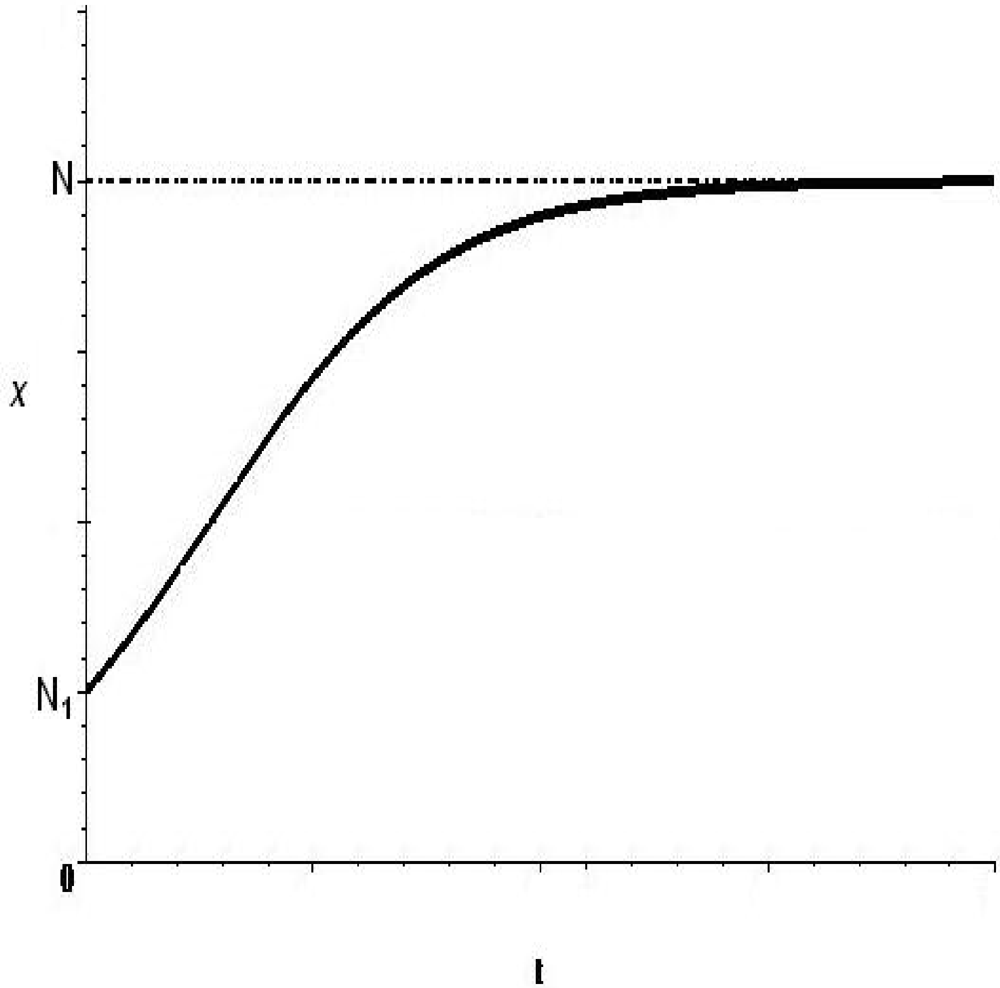


Рис. 3. Логистическая кривая

§7. Уравнение Риккати

Общий вид уравнения Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \tag{17}$$

Функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ непрерывны в промежутке (α, β).

Если $P(x) \equiv 0$, то уравнение является линейным неоднородным.

Если $R(t) \equiv 0$, то уравнение является уравнением Бернулли с $n = 2$.

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах.

Если известно частное решение уравнения, то интегрирование в квадратурах выполнимо.

Пусть $y = y_1(x)$ — частное решение уравнения (17), т.е.

$$\frac{dy_1}{dt} = Py_1^2 + Qy_1 + R.$$

Ведем новую искомую функцию z по формуле

$$y = z + y_1,$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{dy_1}{dt} = Pz^2 + 2Py_1z + Py_1^2 + Qz + Qy_1 + R.$$

$$\frac{dz}{dt} = (2Py_1 + Q)z + Pz^2,$$

это уравнение Бернулли с $n = 2$.

Утверждение. Если известны два частных решения уравнения (17), то его общее решение находится одной квадратурой, а при трех известных решениях квадратуры вообще не понадобятся.

Доказательство.

См. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. 5-е изд. — М.: Наука, 1950. — 460 с.

§8. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует такая функция $U(x, y)$, что левая часть уравнения является её дифференциалом:

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \tag{2}$$

Тогда (1) может быть записано в виде

$$dU(x, y) = 0$$

и имеет общий интеграл

$$U(x, y) = C.$$

Пример. Уравнение $xdy + ydx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах:$d(xy) = 0$, $xy = c$, где C – произвольная постоянная.

Задачи:

а) как установить, что уравнение является уравнением в ПД;

б) как найти соответствующую функцию $U(x, y)$.

Теорема 1 *Пусть Функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены в некоторой односвязной*[a] *области Γ плоскости xOy, и в этой области существуют и непрерывны частные производные по x и y от функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$. Для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах в Γ, необходимо и достаточно выполнение в этой области равенства*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \overset{(x,y)\in\Gamma}{\equiv} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{3}$$

[a] Область без "дырок".

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если левая часть уравнения (1) удовлетворяет (2) и является уравнением в полных дифференциалах, то

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

т.е.

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

В силу того, что $M(x,y)$ имеет непрерывную частную производную по y, а $N(x,y)$ – по x имеем равенства и непрерывность смешанных производных

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

Необходимость (3) доказана.

Достаточность. Существование функции $U(x,y)$ установим её построением. Рассмотрим функцию

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)$ — функция произвольная.

Дифференцируя по x имеем $\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$.

Односвязность обеспечивает принадлежность всего отрезка с концами в точках (x_0,y) и (x,y) области Γ, если вторая точка находится в достаточно малой окрестности первой.

С помощью подбора функции $\varphi(y)$ (считаем её непрерывно дифференцируемой) потребуем выполнения равенства $\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$.

Дифференцируем равенство (4) по y.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y).$$

Используя тождество (3) $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \overset{(x,y)\in\Gamma}{\equiv\equiv} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ и формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,dx + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$$

.

Требуя $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$, находим $\varphi(y)$ из $\varphi'(y) = N(x_0,y)$, тогда

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$

.

В результате построена функция

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C.$$

Теорема доказана.

§9. Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

Функция $\mu(x,y)$, определенная в области $\tilde{\Gamma}$, называется *интегрирующим множителем* уравнения (1), коэффициенты которого $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены в области Γ, если выполняются условия:

1. $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma$;
2. $\mu(x,y) \neq 0$ в Γ;
3. $\mu'_y(x,y)$ и $\mu'_x(x,y)$ существуют и непрерывны в Γ;
4. уравнение $\mu M dx + \mu N dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 2 *Если существует общий интеграл $U(x, y) = C$ уравнения (1), то существует и интегрирующий множитель для этого уравнения.*

Доказательство. Пусть точка $(x_0, y_0) \in \Gamma$ произвольна, $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1), $\varphi(x_0) = y_0$ и $U(x_0, y_0) = C_0$. Подставим это решение в равенство $U(x, y) = C_0$.

Вычислим дифференциал функции $U\left[x, \varphi(x)\right]$:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\varphi'(x)\right] dx = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

С другой стороны $\varphi(x)$ — решение, $U\left[x, \varphi(x)\right] \equiv C_0$, поэтому дифференциал левой части равен нулю вдоль кривой $y = \varphi(x)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0.$$

Также вдоль кривой $y = \varphi(x)$ выполняется равенство

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Получена система уравнений относительно dx и dy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy = 0, \\ M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Считая, что $dx \neq 0$, система (2) имеет ненулевое решение (dx, dy), и, её определитель равен нулю.

Введем функцию $\mu(x, y)$.

$$\mu(x, y) = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{M(x, y)} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}{N(x, y)}.$$

Это равенство выполняется при $y = \varphi(x)$ и, в частности, в точке (x_0, y_0). Точка (x_0, y_0) выбрана в Γ произвольно. Поэтому в Γ верны равенства:

$$\mu(x, y)M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}; \quad \mu(x, y)N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Теорема доказана.

Нахождение интегрирующего множителя.

Предположим, что интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ для уравнения (1) существует. По теореме 1 из § 7 в Γ имеем

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Отсюда

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3}$$

Уравнение для $\mu(x, y)$ не проще, чем уравнение (1). Возможны частные случаи, когда это уравнение разрешимо.

Предположим, что μ есть сложная функция: $\mu = \mu\left[\omega(x, y)\right]$. Тогда

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), получим

$$\frac{\frac{d\mu}{d\omega}}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \omega}{\partial y} - N\frac{\partial \omega}{\partial x}}. \tag{4}$$

Частные случаи:

1. $\omega = x$ (интегрирующий множитель зависит только от x). Уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}. \tag{5}$$

Сначала вычисляется правая часть (5). Если она зависит только от x, то (5) — ОДУ с разделяющимися переменными, множитель $\mu(x)$ находится. Иначе ищем другой путь решения.

2. $\omega = y$. Множитель $\mu = \mu(y)$ существует в том случае, когда выражение

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

зависит только от y.

3. $\omega = x + y$, что будет тогда, когда выражение

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N}$$

можно представить, как функцию величины $\omega = x + y$.

4. $\omega = xy$. В этом случае

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny},$$

и если правая часть как функция от произведения xy, то ищем интегрирующий множитель $\mu = \mu(xy)$.

Теорема 3 *Если μ_0 интегрирующий множитель уравнения (1), т.е.*

$$\mu_0(Mdx + Ndy) = dU_0,$$

а $U_0(x, y) = C$ соответствующий ему интеграл этого уравнения, то выражение

$$\mu = \mu_0\varphi(U_0),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция, тоже будет интегрирующим множителем (1).

Доказательство. Умножим левую часть (1) на $\mu_0\varphi(U_0)$.

$$\mu_0\varphi(U_0)(Mdx + Ndy) = \varphi(U_0)\mu_0(Mdx + Ndy) =$$

$$= \varphi(U_0)dU_0 = d\int \varphi(U_0)\,dU_0$$

Левая часть (1) после умножения на $\mu_0\varphi(U_0)$ стала полным дифференциалом функции $\int \varphi(U_0)\,dU_0$.

Так как φ — произвольная функция, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество интегрирующих множителей.
Теорема доказана.

Теорема 4 *Если μ_0 интегрирующий множитель уравнения (1), а $U_0(x, y)$ — соответствующий ему интеграл уравнения (1), то всякий интегрирующий множитель μ_1 этого уравнения дается формулой*

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция.

§10. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Особые решения.

ОДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

здесь y — искомая функция аргумента x, а F – известная функция от трех аргументов. Во многих случаях решение таких уравнений приходится представлять в неявном или параметрическом виде. Под решением уравнения (1) в неявной форме понимается решение, определяемое уравнением

$$\Psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

которое задает y как неявную функцию от x. Будем пользоваться теоремой о существовании неявной функции из курса МА.

Теорема 5 *Если функция* $\Phi(x, y)$ *непрерывна вместе с частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и*

$$\Phi(x_0, y_0) = 0, \quad \Phi'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то существует такая окрестность точки x_0, *в которой уравнение* $\Phi(x, y) = 0$ *определяет* y *как однозначную функцию от* x: $y = y(x)$ *обладающую следующими свойствами:*

1) $y(x)$ *непрерывна вместе со своей производной* $y'(x)$;

2) $y(x_0) = y_0$.

Пример. Уравнение $y^5y' + x^5 = 0$ имеет решение, определенное в интервале $-1 < x < 1$, заданное в неявной форме

$$y^6 + x^6 - 1 = 0. \tag{3}$$

Возьмем в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ точку $M_0(0, 1)$. Тогда функция $\Psi(x, y) = y^6 + x^6 - 1$ в любой окрестности точки $M_0(0, 1)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка. Кроме того, $\Psi(0, 1) = 0$, $\Psi'_y(0, 1) = 6 \neq 0$, Следовательно, согласно теореме существует окрестность точки $x_0 = 0$, в которой уравнение (3) определяет непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$, $y(0) = 1$. В данном случае окрестность можно найти, разрешив (3) относительно y:

$$y = \sqrt[6]{1 - x^6}. \tag{4}$$

Проверить, что (4) есть решение, можно непосредственной подстановкой.

Функция, заданная параметрически,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 < t < t_1, \tag{5}$$

называется решением уравнения (1) на интервале (t_0, t_1) в параметрической форме, если для всех $t \in (t_0, t_1)$ выполняется тождество

$$F\left[x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\right] \equiv 0, \tag{6}$$

причем

$$x'(t) \neq 0, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Задача Коши для ДУ, не разрешенного относительно производной.

Рассмотрим уравнение (1)

$$F(x, y, y') = 0.$$

Будем предполагать, что функция $F(x, y, p) = 0$ вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области D пространства (x, y, p). Далее $(x, y, p) \in D$. Уравнение $F(x, y, p) = 0$ определяет некоторую поверхность S в трехмерном пространстве. Для того, чтобы выделить единственное решение (1), недостаточно задать $y(x_0) = y_0$. Если (x_0, y_0) задано, то из

$$F(x_0, y_0, y'(x_0)) = 0$$

определяется одно или несколько значений $y'(x_0)$.

Пример. Уравнение $y'^2 = 1$ имеет два семейства решений $y = x + C$ и $y = -x + C$. Через каждую точку плоскости проходят ровно две интегральные кривые.

Задача Коши: найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0,$$

где x_0, y_0, p_0 удовлетворяют $F(x_0, y_0, p_0) = 0$.

Теорема 6 *Пусть выполнено условие*

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0.$$

Тогда решение задачи Коши существует и единственно на некотором интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции из уравнения $F(x, y, p) = 0$ можно локально выразить

$$p = \varphi(x, y),$$

где φ единственна, непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Значит получена задача Коши

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

существование и единственность которой установлены в основной теореме. Теорема доказана.

Множество точек на S, в которых условие теоремы нарушено задается уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0.$$

Если из системы исключить p, то получим дискриминантную кривую

$$D(x, y) = 0,$$

Ветви данной кривой могут быть решениями уравнения (1).

Рассмотрим уравнение $y' = \varphi(x, y)$. Точка (x_0, y_0) называется неособой, если существует ее окрестность U такая, что через каждую точку данной окрестности проходит интегральная кривая и притом только одна.

В противном случае — точка называется особой.

Решение, все точки которого особые называется особым решением.

Пример. Уравнение

$$y' = \frac{2}{3}y^{2/3}.$$

имеет особое решение $y \equiv 0$.

Для уравнения $F(x, y, p) = 0$ точка (x_0, y_0, p_0) называется неособой, если существует её окрестность U (теперь на поверхности S) такая, что через каждую точку данной окрестности проходит интегральная кривая и притом только одна; в противном случае эта точка — особая.
Вывод. Из приведенной теоремы следует, что все особые точки уравнения $F(x, y, p) = 0$ лежат на дискриминантной кривой и что особыми решениями могут быть только ветви дискриминантной кривой.

Рассмотрим семейство кривых на плоскости, заданное уравнением

$$f(x, y, C) = 0, \tag{7}$$

где C — параметр.
Далее предполагаем, что f вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области D пространства (x, y, C) и $f_C \neq 0$. И рас-

сматриваем все в малой окрестности U точки $(x_0, y_0, {}_0)$.

Кривая γ называется огибающей семейства кривых (7), если в каждой своей точке она касается одной из кривых семейства и если в разных точках она касается разных кривых.

Теорема 7 *Огибающая семейства решений есть решение.*

Очевидно — это решение особое.

Доказательство. Примем для определенности, что семейство кривых (7) — решения уравнения

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{8}$$

и $(x_0, y_0) \in \gamma$.

Пусть, далее, $y = \psi(x)$ — интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) и $y = \chi(x)$ — уравнение кривой γ вблизи этой точки. Тогда (так как эти уравнения касаются)

$$\psi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0), \quad \psi'(x_0) = \chi'(x_0).$$

Поэтому $\chi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0)$ и (8) выполнено. Теорема доказана.

Простейшие типы ДУ, не разрешенные относительно производной.

1. Уравнение первого порядка степени n.

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \quad (9)$$

где $a_j(x,y)$, $(j = 0,1,\ldots,n)$ — функции, непрерывные в некоторой области. Предполагая, что $a_0(x,y) \neq 0$ по основной теореме алгебры уравнение (9) определяет n значений y'. Отбрасывая среди этих значений мнимые, получаем в некоторой окрестности (x_0,y_0) $m(m \leq n)$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f_k(x,y), \quad (k = 1,\ldots,m) \quad (10)$$

Каждое из уравнений задает в некоторой области D плоскости xOy поле направлений. Если в D $f_k(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности, то через каждую точку этой области проходит m интегральных кривых. Интегрируя (10) получим совокупность общих решений или общих интегралов

$$y_k = \varphi_k(x, C), \quad \Psi_k(x, y) = C, \tag{11}$$

(11) где C— произвольная постоянная. Совокупность (11) называется общим интегралом (9).

Пример. Найдем общий интеграл уравнения $y'^3 - x^2 y' = 0$. Решая относительно y получим

$$y' = 0, \quad y' = x, \quad y' = -x,$$

совокупность общих решений дает общий интеграл

$$y = C, \quad y = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Решение задачи Коши в каждой точке плоскости xOy, не лежащей на оси Oy единственно. В каждой точке (x_0, y_0), $(x \neq 0)$ имеем три разных направления поля (наложение полей)

$$y_0' = 0, \quad y_0' = x_0, \quad y_0' = -x_0.$$

Через точку (x_0, y_0) проходят три интегральных кривых

$$y = y_0, \quad y = \frac{x^2 - x_0^2}{2} + y_0, \quad y = \frac{x_0^2 - x^2}{2} + y_0.$$

Особым решением уравнения (1) называется решение, которое во всех своих точках не обладает свойством единственности, т.е. через каждую точку которого проходит не менее двух интегральных кривых, имеющих одинаковое направление касательных.

В примере $x = 0$ не является интегральной кривой и уравнение не имеет особых решений.

2. Уравнение $F(y')=0.$

Предположим имеет конечное или бесконечное число вещественных корней,

$$y'=k_i, \quad (i=1,2,\ldots), \quad k_i=const,$$

которые не заполняют сплошь некоторый интервал. Тогда

$$y=k_i x+C, \quad k_i=\frac{y-C}{x}.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

3. Метод введения параметра. Уравнения $F(y, y') = 0$ и $F(x, y') = 0$. Если разрешимы относительно y', то получаем уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть $F(y, y') = 0$ можно выразить $y = \varphi(y')$. Полагаем $y' = p$; Тогда

$$y = \varphi(p)$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad \frac{\varphi'(p)}{p} = dx$$

Окончательно имеем параметрическое представление

$$x = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C, \quad y = \varphi(p).$$

Пусть $F(y, p) = 0$ задано в параметрической форме

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t).$$

Дифференцируем первое соотношение по t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = p\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

получим параметрическое представление

$$x = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

Рассмотрим $F(x, y') = 0$ и из уравнения $F(x, p) = 0$ можно выразить

$$x = \varphi(p).$$

Тогда $dy = y'dx = pdx = p\varphi'(p)dp$ и имеем

$$x = \varphi(p), \quad y = \int\limits_{p_0}^{p} p\varphi'(p)dp + C.$$

Если кривая $F(x, p) = 0$ задана параметрически $x = \varphi(t)$, $p = \psi(t)$, то дифференцируя первое уравнение по t имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dy}{dt} = \varphi'(t).$$

Получим параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \quad y = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

4. Уравнение Лагранжа. Если $F(x, y, p) = 0$ линейно относительно x и y, то уравнение можно привести к виду

$$y = xf(p) + g(p).$$

Дифференцируем по x.

$$p = f(p) + \left[xf'(p) + g'(p)\right] \frac{dp}{dx}$$

получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x = \frac{g'(p)}{p - g(p)}.$$

Находим $x = x(p, C)$ подставляем в исходное и получаем $y = y(p, C)$. Если

$$p_0 - f(p_0) = 0,$$

то имеется решение (интегральная кривая — прямая)

$$y = xf(p_0) + g(p_0).$$

Случай $f(p) \equiv p$ приводит к уравнению Клеро

$$y = xp + g(p).$$

Полагая $y' = p$ и дифференцируя по x получаем

$$(g'(p) + x)\frac{dp}{dx} = 0.$$

В случае $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ имеем семейство

$$y = xC + g(C).$$

В случае $x = -g'(p)$ получаем интегральную кривую,

$$x = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p)$$

которая является особым решением.

5. Общий метод введения параметров. Считаем (x, y, y') координатами пространственной точки.

Уравнение $F(x, y, p) = 0$ в системе координат x, y, p можно рассматривать как поверхность. Пусть удалось найти уравнение поверхности в параметрической форме:

$$x = \alpha(u, v), \quad y = \beta(u, v), \quad p = \gamma(u, v) \tag{12}$$

Равенство $dy = p\,dx$ примет вид

$$\frac{\partial \beta}{\partial u}\,du + \frac{\partial \beta}{\partial v}\,dv =$$

$$= p\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,du + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\,dv\right).$$

Имеем

$$\frac{dv}{du}=\frac{p\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v}-p\frac{\partial\alpha}{\partial v}}. \tag{13}$$

Если (13) интегрируется, $v=\omega_1(u,C)$, (или $u=\omega_2(v,C)$), то

$$x=\alpha\left[u,\omega_1(u,C)\right], \qquad y=\beta\left[u,\omega_1(u,C)\right]$$

(или

$$x=\alpha\left[\omega_2(v,C),v\right], \qquad y=\beta\left[\omega_2(v,C),v\right] \quad)$$

решение уравнения $F(x,y,p)=0$.

Если $\Omega(u,v,C)=0$ — общий интеграл уравнения (13), то решение уравнения $F(x,y,p)=0$ дается равенствами

$$x=\alpha(u,v),\;\; y=\beta(u,v),\;\; \Omega(u,v,C)=0.$$

Замечание. Изложенный способ возможен:

1) исходное уравнение допускает параметризацию;

2) полученное уравнение (13) интегрируется в замкнутом виде. Например. Если $F(x,y,y')=0$ можно разрешить $y=f(x,y')$, то положив $u=x$, $y'=v$ получим

$$y=f(u,v).$$

Тогда уравнение (13) имеет вид

$$\frac{dx}{dv}=\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v-\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Исходное уравнение будет интегрироваться, если будет интегрироваться последнее.

§11. Вспомогательный материал из курса алгебры и математического анализа.

1. Линейные нормированные пространства.

Множество $\mathbf{B}$ называется линейным пространством, если для любых его элементов x, y определена сумма $(x + y) \in \mathbf{B}$ и для любого $(x + y) \in \mathbf{B}$ и вещественного (или комплексного) числа α определено произведение $\alpha x \in \mathbf{B}$ со следующими свойствами:

1. $x + y = y + x$.

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Существует нулевой элемент $O_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$, такой, что $x + O_{\mathbf{B}} = x$ для всех $x \in \mathbf{B}$.

4. $1 \cdot x = x$, $0 \cdot x = O_{\mathbf{B}}$.

5. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta \cdot x$.

6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

и т.д.

Линейное пространство $\mathbf{B}$ называется нормированным, если каждому элементу $x \in \mathbf{B}$ поставлено в соответствие число $\|x\|$ (норма x), обладающее следующими свойствами:

1. $\|x\| > 0$, $x \neq O_{\mathbf{B}}$; $\|O_{\mathbf{B}}\| = 0$.
2. $\alpha\|x\| = |\alpha|\|x\|$ (α — число).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Примеры. 1. Числовая прямая $\mathbf{R}$, $\|x\| = |x|$.
2. Евклидово пространство $\mathbf{E}^n$. Элементы — векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

3. Пространство $\mathbf{R}^n$. Элементы — векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

$$\|x\| = |x| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$

4. Пространство $C(a, b)$. Элементы — функции $x(t)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

5. Пространство $\mathbf{C}(a, b)$. Элементы — вектор-функции

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T,$$

непрерывные на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \max_{1 \le j \le n} \left(\max_{a \le t \le b} |x_j(t)| \right).$$

Множество $M \subset \mathbf{B}$ называется ограниченным, если существует $R > 0$, такое, что $\|x\| \le R$ для всех $x \in M$.

В $\mathbf{B}$ по определению $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, если $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Свойства пределов аналогичны свойствам пределов для числовых последовательностей.

Сходимость в $\mathbf{B} = \mathbf{R}^n$ величин x^k к x эквивалентна сходимости компонент

$$\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Сходимость в $\mathbf{B} = C(a, b)$ величин $x_n(t)$ к $x(t)$ — равномерная сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ на $[a, b]$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x_k - x_l\| = 0.$$

Линейное нормированное пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Полное нормированное пространство называют банаховым. Пространства из примеров банаховы.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $(x_n \in \mathbf{B})$ — сходящийся, если сходится последовательность частичных сумм.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по норме (т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится), то этот ряд сходится.

Пусть каждому элементу $x \in M$, $M \subset \mathbf{B}$, поставлен элемент $A(x) \in \mathbf{B}$. Тогда задан оператор A.

Пример. Пусть $x = x(t)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$ с графиком в пределах некоторого открытого множества Γ и $t_0 \in [\alpha, \beta]$). Определим оператор

$$A(x(\cdot)) = x^*(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau \tag{1}$$

где $f(t, x)$ функция, определенная и непрерывная в области Γ. Функция $x^*(t)$ непрерывна в промежутке $[\alpha, \beta]$. Обозначим отображение $x(t)$ в $x^*(t)$ через $A: \quad A(x(\cdot)) = x^*(\cdot)$.

2. Принцип сжатых отображений.

Применим метод последовательных приближений к уравнению

$$\varphi = A(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{B},$$

A действует из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Возьмем произвольную точку $\varphi_0 \in \mathbf{B}$

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \ldots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n).$$

Пусть φ_n сходится к φ и оператор A позволяет осуществить предельный переход при $n \to \infty$ в равенстве

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n),$$

получаем неподвижную точку

$$\varphi = A(\varphi).$$

Пусть $M \subset \mathbf{B}$. Оператор A, определенный на M, сжимает M, если

1) $A : M \to M$ (для любого $\varphi \in M$ имеем $A(\varphi) \in M$).

2) Существует k, $0 < k < 1$, такое, что

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| \le k\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

для любых $\varphi_1,\ \varphi_2 \in M$.

Достаточные условия сходимости метода. Принцип сжатых отображений.

Теорема 8 *Пусть M — замкнутое ограниченное множество в банаховом пространстве $\mathbf{B}$. Пусть оператор A сжимает M. Тогда уравнение*

$$\varphi = A(\varphi) \tag{2}$$

имеет решение $\varphi \in M$, и притом единственное.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к (2) метод последовательных приближений. Возьмем $\varphi_0 \in M$ построим

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \ldots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n).$$

1. Так как $A : M \to M$, то все $\varphi_j \in M$.

2. Последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится. Сходимость $\{\varphi_n\}$ эквивалентна сходимости ряда

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \ldots . \tag{3}$$

Т.к. M ограничено, то $\exists C > 0$, что $\|\varphi\| \leq C$ для любого $\varphi \in M$.

По индукциии доказывается, что

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq 2Ck^n, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

При $n = 0$ верно,

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_0\| \leq 2C.$$

И если (4) справедливо для n, то для $n + 1$ в силу условия теоремы

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|A(\varphi_n) - A(\varphi_{n-1})\| \leq k\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq 2Ck^{n+1}$$

Это доказывает (4). Значит ряд (3) равномерно сходится по признаку Вейерштрасса (нормы членов ряда не превосходят членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем k, $0 < k < 1$). Т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$$

существует и $\varphi \in M$ (M - замкнуто.)

3. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n) = A(\varphi). \tag{5}$$

Действительно

$$\|A(\varphi_n) - A(\varphi)\| \leq k\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$$

при $n \to \infty$ и (5) доказано.

4. Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n),$$

получаем, что φ — решение уравнения (2).

5. Решение уравнения (2) единственно. Пусть $\varphi, \psi \in M$ являются решениями. Тогда $\varphi - \psi = A(\varphi) - A(\psi)$, откуда

$$\|\varphi - \psi\| \leq k\|\varphi - \psi\|.$$

Так как $0 < k < 1$, то $\|\varphi - \psi\| = 0$ и $\varphi = \psi$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{6}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Лемма 1 *Пусть* $x = x(t)$ *— некоторое решение уравнения (6), определенное на интервале* $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$*, так что выполнено тождество*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in (\alpha_1, \alpha_2) \tag{8}$$

и $x = x(t)$ *удовлетворяет начальному условию (7). Тогда для функции* $x = x(t)$ *на всем* (α_1, α_2) *выполнено интегральное тождество*

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau. \tag{9}$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $x = x(t)$ *на* (α_1, α_2) *выполнено тождество (9), то функция* $x = x(t)$ *дифференцируема, является решением уравнения (6) и удовлетворяет начальному условию (7).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть для некоторой непрерывной функции $x = x(t)$ на интервале (α_1, α_2) выполнено (9). По теореме о производной от интеграла по переменному верхнему пределу имеем $\frac{dx}{dt} = f[t, x(t)]$. При $t = t_0$ из (9) получаем $x(t_0) = x_0$.

2. Пусть теперь $x = x(t)$ — решение задачи Коши (6)–(7). Интегрируем

$$dx(t) \equiv f[t, x(t)]dt. \tag{10}$$

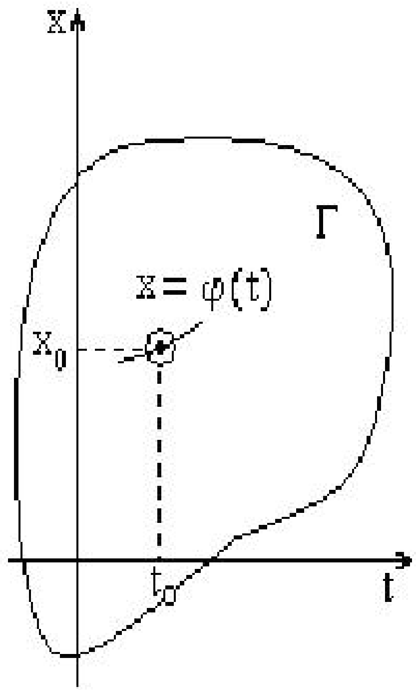
в пределах от t_0 до t получаем

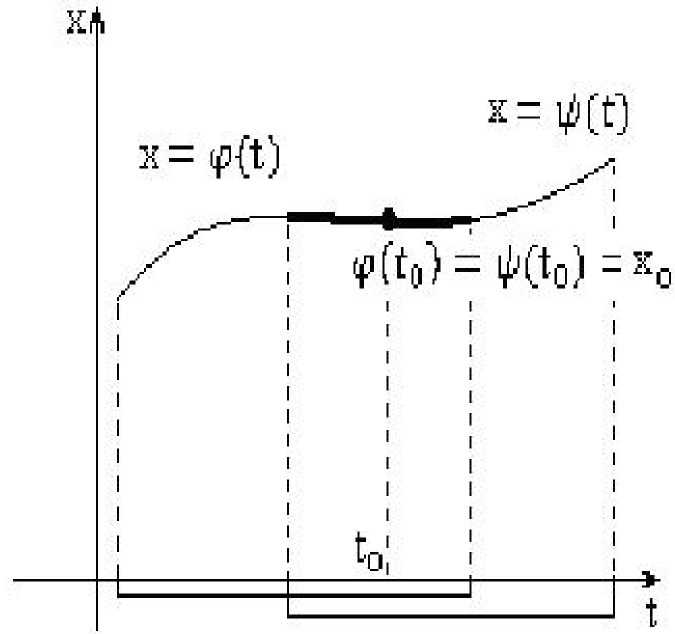
$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau.$$

Учитывая $x(t_0) = x_0$ получаем (9).

Лемма доказана.

§12. Доказательство теоремы Коши.





Пусть $(t_0, x_0) \in \Gamma$. Область Γ открытое множество и (t_0, x_0) содержится в Γ вместе с некоторой своей окрестностью.

Рассмотрим

$$D_r = \{(t, x) \in R^2 : |t - t_0| \leqslant r,\ |x - x_0| \leqslant a\},$$

D_r - компакт (является ограниченным и замкнутым) в Γ. Функции $f(t, x)$ и $f'_x(t, x)$ непрерывны в Γ значит

$$\exists \quad K, M > 0 \quad \forall (t, x) \in D_r \quad |f(t, x)| \leqslant K, \quad |f'_x(t, x)| \leqslant M.$$

Обозначим

$$D_q = \{(t, x) \in R^2 : |t - t_0| \leqslant q,\ |x - x_0| \leqslant a\},$$

$$D_q \subset D_r, \quad 0 < q \leq r.$$

Обозначим

$G_q = \{x(\cdot) \in C(t_0 - q, t_0 + q) : \quad |x - x_0| \leqslant a \quad \forall t \in [t_0 - q, t_0 + q]\}$,

G_q — подпространство пространства

$$C = C(t_0 - q, t_0 + q)$$

непрерывных функций $\{x(t)\}$, заданных на отрезке $[t_0 - -q, t_0 + q]$ с метрикой

$$\rho[x_1(t), x_2(t)] = \max_{|t-t_0|\leqslant r} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Графики функций не выходят за пределы прямоугольника D_q. Очевидно, $\forall x(t) \in G_q$ справедливо неравенство $|x(t) - x_0| \leqslant a$.

§10. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Особые решения.

ОДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

здесь y — искомая функция аргумента x, а F – известная функция от трех аргументов. Во многих случаях решение таких уравнений приходится представлять в неявном или параметрическом виде. Под решением уравнения (1) в неявной форме понимается решение, определяемое уравнением

$$\Psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

которое задает y как неявную функцию от x. Будем пользоваться теоремой о существовании неявной функции из курса МА.

Теорема 1 *Если функция* $\Phi(x, y)$ *непрерывна вместе с частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и*

$$\Phi(x_0, y_0) = 0, \quad \Phi'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то существует такая окрестность точки x_0*, в которой уравнение* $\Phi(x, y) = 0$ *определяет* y *как однозначную функцию от* x*:* $y = y(x)$ *обладающую следующими свойствами:*
1) $y(x)$ *непрерывна вместе со своей производной* $y'(x)$*;*
2) $y(x_0) = y_0$*.*

Пример. Уравнение $y^5 y' + x^5 = 0$ имеет решение, определенное в интервале $-1 < x < 1$, заданное в неявной форме

$$y^6 + x^6 - 1 = 0. \tag{3}$$

Возьмем в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ точку $M_0(0, 1)$. Тогда функция $\Psi(x, y) = y^6 + x^6 - 1$ в любой окрестности точки $M_0(0, 1)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка. Кроме того, $\Psi(0, 1) = 0$, $\Psi'_y(0, 1) = 6 \neq 0$, Следовательно, согласно теореме существует окрестность точки $x_0 = 0$, в которой уравнение (3) определяет непрерывно дифференцируемую функцию $y = y(x)$, $y(0) = 1$. В данном случае окрестность можно найти, разрешив (3) относительно y:

$$y = \sqrt[6]{1 - x^6}. \tag{4}$$

Проверить, что (4) есть решение, можно непосредственной подстановкой.

Функция, заданная параметрически,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 < t < t_1, \tag{5}$$

называется решением уравнения (1) на интервале (t_0, t_1) в параметрической форме, если для всех $t \in (t_0, t_1)$ выполняется тождество

$$F\left[x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\right] \equiv 0, \tag{6}$$

причем

$$x'(t) \neq 0, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Задача Коши для ДУ, не разрешенного относительно производной.

Рассмотрим уравнение (1)

$$F(x, y, y') = 0.$$

Будем предполагать, что функция $F(x, y, p) = 0$ вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области D пространства (x, y, p). Далее $(x, y, p) \in D$. Уравнение $F(x, y, p) = 0$ определяет некоторую поверхность S в трехмерном пространстве. Для того, чтобы выделить единственное решение (1), недостаточно задать $y(x_0) = y_0$. Если (x_0, y_0) задано, то из

$$F(x_0, y_0, y'(x_0)) = 0$$

определяется одно или несколько значений $y'(x_0)$.

Пример. Уравнение $y'^2 = 1$ имеет два семейства решений $y = x + C$ и $y = -x + C$. Через каждую точку плоскости проходят ровно две интегральные кривые.

Задача Коши: найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0,$$

где x_0, y_0, p_0 удовлетворяют $F(x_0, y_0, p_0) = 0$.

Теорема 2 *Пусть выполнено условие*

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0.$$

Тогда решение задачи Коши существует и единственно на некотором интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции из уравнения $F(x, y, p) = 0$ можно локально выразить

$$p = \varphi(x, y),$$

где φ единственна, непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Значит получена задача Коши

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

существование и единственность которой установлены в основной теореме. Теорема доказана.

Множество точек на S, в которых условие теоремы нарушено задается уравнениями

$$F(x,y,p)=0, \quad F'_p(x,y,p)=0. \tag{7}$$

Если из системы исключить p, то получим **дискриминантную** кривую

$$D(x,y)=0.$$

Ветви данной кривой могут быть решениями уравнения (1).

Особые точки. Особые решения.

Рассмотрим уравнение $y' = \varphi(x, y)$.

Точка (x_0, y_0) называется неособой, если существует ее окрестность U такая, что через каждую точку данной окрестности проходит интегральная кривая и притом только одна.

В противном случае — точка называется особой.

Решение, все точки которого особые называется особым решением.

Пример. Уравнение

$$y' = \frac{2}{3} y^{2/3}.$$

имеет особое решение $y \equiv 0$.

Рассмотрим $F(x, y, p) = 0$.

Точка (x_0, y_0, p_0) называется неособой, если существует её окрестность U (теперь на поверхности S) такая, что через каждую точку данной окрестности проходит интегральная кривая и притом только одна;

в противном случае эта точка — особая.

Вывод. Все особые точки уравнения $F(x, y, p) = 0$ лежат на дискриминантной кривой и что особыми решениями могут быть только ветви дискриминантной кривой.

Способ нахождения особых решений уравнения $F(x, y, y') = 0$:

- найти его дискриминантные кривые;
- проверить, являются ли дискриминантные кривые интегральными кривыми этого уравнения;
- проверить, нарушается ли свойство единственности в точках этих интегральных кривых.

Теорема 3 *Если* $F(x, y, p)$, $p = \frac{dy}{dx}$ *в области* D *непрерывна вместе с частными производными первого порядка и в этой области*

$$F'_y(x, y, p) \neq 0,$$

то для того, чтобы дискриминантная кривая уравнения $F(x, y, y') = 0$ (1) *была решением этого уравнения, необходимо и достаточно, чтобы наряду с уравнениями* (7)

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0, \quad (p = \frac{dy}{dx})$$

выполнялось равенство

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0. \tag{8}$$

Доказательство.

Необходимость. Допустим, что $y = \varphi(x)$ — функция, полученная из дискриминантной кривой уравнения (1), является решением уравнения (1). Дифференцируя $F(x, y, y') = 0$ по x с учетом $F'_{y'}(x, y, y') = 0$ приходим к (8).

Достаточность. Пусть имеют место равенства

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0,$$

$$F'_x(x, y, p) + pF'_y(x, y, p) = 0.$$

Тогда, определяя из первых двух уравнений y и p как функции от x, получаем

$$y = \varphi(x), \quad p = \psi(x).$$

Покажем, что $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения $F(x,y,y')=0$. Дифференцируя равенство $F(x,y,p)=0$ по x имеем

$$F'_x(x,y,p)+F'_y(x,y,p)\frac{dy}{dx}+F'_p(x,y,p)\frac{dp}{dx}=0$$

или

$$F'_x(x,y,p)+F'_y(x,y,p)\frac{dy}{dx}=0.$$

Отсюда, сравнивая это равенство с условием (8) получаем, что

$$p=y'=\varphi'(x).$$

Т.е. $y=\varphi(x)$ есть решение $F(x,y,y')=0$. Теорема доказана.

Огибающая семейства кривых. II способ нахождения особого решения. Рассмотрим семейство кривых на плоскости, заданное уравнением

$$f(x, y, C) = 0, \tag{9}$$

где C — параметр.

Далее предполагаем, что f вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области D пространства (x, y, C) и $f_C \neq 0$. И рассматриваем все в малой окрестности U точки $(x_0, y_0, {}_0)$.

Кривая γ называется огибающей семейства кривых (9), если в каждой своей точке она касается одной из кривых семейства и если в разных точках она касается разных кривых.

Теорема 4 *Огибающая семейства решений есть решение.*

Очевидно — это решение особое.

Доказательство. Примем для определенности, что семейство кривых (9) — решения уравнения

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{10}$$

и $(x_0, y_0) \in \gamma$.

Пусть, далее, $y = \psi(x)$ — интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) и $y = \chi(x)$ — уравнение кривой γ вблизи этой точки. Тогда (так как эти уравнения касаются)

$$\psi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0), \quad \psi'(x_0) = \chi'(x_0).$$

Поэтому $\chi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0)$ и (10) выполнено. Теорема доказана.

Простейшие типы ДУ, не разрешенные относительно производной.

1. Уравнение первого порядка степени n.

$$a_0(x,y)(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \quad (11)$$

где $a_j(x,y)$, $(j = 0,1,\dots,n)$ — функции, непрерывные в некоторой области. Предполагая, что $a_0(x,y) \neq 0$ по основной теореме алгебры уравнение (11) определяет n значений y'. Отбрасывая среди этих значений мнимые, получаем в некоторой окрестности (x_0,y_0) $m(m \leq n)$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f_k(x,y), \quad (k = 1,\dots,m) \quad (12)$$

Каждое из уравнений задает в некоторой области D плоскости xOy поле направлений. Если в D $f_k(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности, то через каждую точку этой области проходит m интегральных кривых. Интегрируя (12) получим совокупность общих решений или общих интегралов

$$y_k = \varphi_k(x, C), \quad \Psi_k(x, y) = C, \tag{13}$$

(13) где C— произвольная постоянная. Совокупность (13) называется общим интегралом (11).

Пример. Найдем общий интеграл уравнения $y'^3 - x^2 y' = 0$. Решая относительно y получим

$$y' = 0, \quad y' = x, \quad y' = -x,$$

совокупность общих решений дает общий интеграл

$$y = C, \quad y = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Решение задачи Коши в каждой точке плоскости xOy, не лежащей на оси Oy единственно. В каждой точке (x_0, y_0), $(x \neq 0)$ имеем три разных направления поля (наложение полей)

$$y_0' = 0, \quad y_0' = x_0, \quad y_0' = -x_0.$$

Через точку (x_0, y_0) проходят три интегральных кривых

$$y = y_0, \quad y = \frac{x^2 - x_0^2}{2} + y_0, \quad y = \frac{x_0^2 - x^2}{2} + y_0.$$

Особым решением уравнения (1) называется решение, которое во всех своих точках не обладает свойством единственности, т.е. через каждую точку которого проходит не менее двух интегральных кривых, имеющих одинаковое направление касательных.
В примере $x = 0$ не является интегральной кривой и уравнение не имеет особых решений.

2. Уравнение $F(y') = 0$.

Предположим имеет конечное или бесконечное число вещественных корней,

$$y' = k_i, \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad k_i = const,$$

которые не заполняют сплошь некоторый интервал. Тогда

$$y = k_i x + C, \quad k_i = \frac{y - C}{x}.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

3. Метод введения параметра. Уравнения $F(y, y') = 0$ и $F(x, y') = 0$. Если разрешимы относительно y', то получаем уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть $F(y, y') = 0$ можно выразить $y = \varphi(y')$. Полагаем $y' = p$; Тогда

$$y = \varphi(p).$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad \frac{\varphi'(p)}{p} = dx.$$

Окончательно имеем параметрическое представление

$$x = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C, \quad y = \varphi(p).$$

Пусть $F(y,p)=0$ задано в параметрической форме

$$y=\varphi(t),\quad p=\psi(t).$$

Дифференцируем первое соотношение по t

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=p\frac{dx}{dt}=\varphi'(t),\quad dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Получим параметрическое представление

$$x=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C,\quad y=\varphi(t).$$

Рассмотрим $F(x, y') = 0$ и из уравнения $F(x, p) = 0$ можно выразить

$$x = \varphi(p).$$

Тогда $dy = y'dx = pdx = p\varphi'(p)dp$ и имеем

$$x = \varphi(p), \quad y = \int\limits_{p_0}^{p} p\varphi'(p)dp + C.$$

Если кривая $F(x, p) = 0$ задана параметрически $x = \varphi(t)$, $p = \psi(t)$, то дифференцируя первое уравнение по t имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dy}{dt} = \varphi'(t).$$

Получим параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \quad y = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

4. Уравнение Лагранжа. Если $F(x, y, p) = 0$ линейно относительно x и y, то уравнение можно привести к виду

$$y = xf(p) + g(p).$$

Дифференцируем по x.

$$p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]\,\frac{dp}{dx}$$

получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = \frac{g'(p)}{p - g(p)}.$$

Находим $x = x(p, C)$ подставляем в исходное и получаем $y = y(p, C)$. Если

$$p_0 - f(p_0) = 0,$$

то имеется решение (интегральная кривая — прямая)

$$y = xf(p_0) + g(p_0).$$

Случай $f(p) \equiv p$ приводит к уравнению Клеро

$$y = xp + g(p).$$

Полагая $y' = p$ и дифференцируя по x получаем

$$(g'(p) + x)\frac{dp}{dx} = 0.$$

В случае $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$ имеем семейство

$$y = xC + g(C).$$

В случае $x = -g'(p)$ получаем интегральную кривую,

$$x = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p)$$

которая является особым решением.

5. Общий метод введения параметров. Считаем (x, y, y') координатами пространственной точки.

Уравнение $F(x, y, p) = 0$ в системе координат x, y, p можно рассматривать как поверхность. Пусть удалось найти уравнение поверхности в параметрической форме:

$$x = \alpha(u, v), \quad y = \beta(u, v), \quad p = \gamma(u, v) \tag{14}$$

Равенство $dy = p\,dx$ примет вид

$$\frac{\partial \beta}{\partial u}\,du + \frac{\partial \beta}{\partial v}\,dv =$$

$$= p\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,du + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\,dv\right).$$

Имеем

$$\frac{dv}{du} = \frac{p\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v} - p\frac{\partial\alpha}{\partial v}}. \tag{15}$$

Если (15) интегрируется, $v = \omega_1(u, C)$, (или $u = \omega_2(v, C)$), то

$$x = \alpha\left[u, \omega_1(u, C)\right], \qquad y = \beta\left[u, \omega_1(u, C)\right]$$

(или

$$x = \alpha\left[\omega_2(v, C), v\right], \qquad y = \beta\left[\omega_2(v, C), v\right] \quad)$$

решение уравнения $F(x, y, p) = 0$.

Если $\Omega(u, v, C) = 0$ — общий интеграл уравнения (15), то решение уравнения $F(x, y, p) = 0$ дается равенствами

$$x = \alpha(u, v), \quad y = \beta(u, v), \quad \Omega(u, v, C) = 0.$$

Замечание. Изложенный способ возможен:

1) исходное уравнение допускает параметризацию;

2) полученное уравнение (15) интегрируется в замкнутом виде. Например. Если $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить $y = f(x, y')$, то положив $u = x$, $y' = v$ получим

$$y = f(u, v).$$

Тогда уравнение (15) имеет вид

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v - \frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Исходное уравнение будет интегрироваться, если будет интегрироваться последнее.

§11. Вспомогательный материал из курса алгебры и математического анализа.

1. Линейные нормированные пространства.

Множество $\mathbf{B}$ называется линейным пространством, если для любых его элементов x, y определена сумма $(x+y) \in \mathbf{B}$ и для любого $(x+y) \in \mathbf{B}$ и вещественного (или комплексного) числа α определено произведение $\alpha x \in \mathbf{B}$ со следующими свойствами:

1. $x + y = y + x$.

2. $(x+y)+z = x+(y+z)$.

3. Существует нулевой элемент $O_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$, такой, что $x + O_{\mathbf{B}} = x$ для всех $x \in \mathbf{B}$.

4. $1 \cdot x = x$, $0 \cdot x = O_{\mathbf{B}}$.

5. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta \cdot x$.

6. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

и т.д.

Линейное пространство $\mathbf{B}$ называется нормированным, если каждому элементу $x \in \mathbf{B}$ поставлено в соответствие число $\|x\|$ (норма x), обладающее следующими свойствами:

1. $\|x\| > 0$, $x \neq O_{\mathbf{B}}$; $\|O_{\mathbf{B}}\| = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (α — число).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Примеры. 1. Числовая прямая $\mathbf{R}$, $\|x\| = |x|$.

2. Евклидово пространство $\mathbf{E}^n$. Элементы — векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

3. Пространство $\mathbf{R}^n$. Элементы — векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

$$\|x\| = |x| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|.$$

4. Пространство $C(a, b)$. Элементы — функции $x(t)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

5. Пространство $\mathbf{C}(a, b)$. Элементы — вектор-функции

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T,$$

непрерывные на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\max_{a \leq t \leq b} |x_j(t)| \right).$$

Множество $M \subset \mathbf{B}$ называется ограниченным, если существует $R > 0$, такое, что $\|x\| \leq R$ для всех $x \in M$.

В $\mathbf{B}$ по определению $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, если $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Свойства пределов аналогичны свойствам пределов для числовых последовательностей.

Сходимость в $\mathbf{B} = \mathbf{R}^n$ величин x^k к x эквивалентна сходимости компонент

$$\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Сходимость в $\mathbf{B} = C(a, b)$ величин $x_n(t)$ к $x(t)$ — равномерная сходимость последовательности $\{x_n(t)\}$ на $[a, b]$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\lim_{k,l\to\infty} \|x_k - x_l\| = 0.$$

Линейное нормированное пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Полное нормированное пространство называют банаховым. Пространства из примеров банаховы.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $(x_n \in \mathbf{B})$ — сходящийся, если сходится последовательность частичных сумм.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по норме (т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится), то этот ряд сходится.

Пусть каждому элементу $x \in M$, $M \subset \mathbf{B}$, поставлен элемент $A(x) \in \mathbf{B}$. Тогда задан оператор A.

Пример. Пусть $x = x(t)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$ с графиком в пределах некоторого открытого множества Γ и $t_0 \in [\alpha, \beta]$). Определим оператор $A(x(\cdot))$:

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau \tag{1}$$

где $f(t, x)$ функция, определенная и непрерывная в области Γ. Функция $x^*(t)$ непрерывна в промежутке $[\alpha, \beta]$. Обозначим отображение $x(t)$ в $x^*(t)$ через $A: \quad A(x(\cdot)) = x^*(\cdot)$.

2. Принцип сжатых отображений.

Применим метод последовательных приближений к уравнению

$$\varphi = A(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{B},$$

A действует из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Возьмем произвольную точку $\varphi_0 \in \mathbf{B}$

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \ldots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n).$$

Пусть φ_n сходится к φ и оператор A позволяет осуществить предельный переход при $n \to \infty$ в равенстве

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n),$$

получаем неподвижную точку

$$\varphi = A(\varphi).$$

Пусть $M \subset \mathbf{B}$. Оператор A, определенный на M, сжимает M, если

1) $A: M \to M$ (для любого $\varphi \in M$ имеем $A(\varphi) \in M$).

2) Существует k, $0 < k < 1$, такое, что

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

для любых $\varphi_1,\ \varphi_2 \in M$.

Достаточные условия сходимости метода. Принцип сжатых отображений.

Теорема 5 *Пусть M — замкнутое ограниченное множество в банаховом пространстве $\mathbf{B}$. Пусть оператор A сжимает M. Тогда уравнение*

$$\varphi = A(\varphi) \tag{2}$$

имеет решение $\varphi \in M$, и притом единственное.

Доказательство. Применим к (2) метод последовательных приближений. Возьмем $\varphi_0 \in M$ построим

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \ldots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n).$$

1. Так как $A : M \to M$, то все $\varphi_j \in M$.

2. Последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится. Сходимость $\{\varphi_n\}$ эквивалентна сходимости ряда

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \ldots . \qquad (3)$$

Т.к. M ограничено, то $\exists C > 0$, что $\|\varphi\| \leq C$ для любого $\varphi \in M$.

По индукциии доказывается, что

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\| \le 2Ck^n, \quad n=0,1,\dots. \tag{4}$$

При $n=0$ верно,

$$\|\varphi_1-\varphi_0\| \le \|\varphi_1\|+\|\varphi_0\| \le 2C.$$

И если (4) справедливо для n, то для $n+1$ в силу условия теоремы

$$\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\| = \|A(\varphi_n)-A(\varphi_{n-1})\| \le k\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\| \le 2Ck^n$$

Это доказывает (4). Значит ряд (3) равномерно сходится по признаку Вейерштрасса (нормы членов ряда не превосходят членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем k, $0<k<1$). Т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$$

существует и $\varphi\in M$ (M - замкнуто.)

3. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n) = A(\varphi). \tag{5}$$

Действительно

$$\|A(\varphi_n) - A(\varphi)\| \leq k\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$$

при $n \to \infty$ и (5) доказано.

4. Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n),$$

получаем, что φ — решение уравнения (2).

5. Решение уравнения (2) единственно. Пусть $\varphi, \psi \in M$ являются решениями. Тогда $\varphi - \psi = A(\varphi) - A(\psi)$, откуда

$$\|\varphi - \psi\| \leq k\|\varphi - \psi\|.$$

Так как $0 < k < 1$, то $\|\varphi - \psi\| = 0$ и $\varphi = \psi$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{6}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Лемма 1 *Пусть* $x = x(t)$ *— некоторое решение уравнения (6), определенное на интервале* $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$*, так что выполнено тождество*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in (\alpha_1, \alpha_2) \tag{8}$$

и $x = x(t)$ *удовлетворяет начальному условию (7). Тогда для функции* $x = x(t)$ *на всем* (α_1, α_2) *выполнено интегральное тождество*

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau. \tag{9}$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $x = x(t)$ *на* (α_1, α_2) *выполнено тождество (9), то функция* $x = x(t)$ *дифференцируема, является решением уравнения (6) и удовлетворяет начальному условию (7).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть для некоторой непрерывной функции $x = x(t)$ на интервале (α_1, α_2) выполнено (9). По теореме о производной от интеграла по переменному верхнему пределу имеем $\frac{dx}{dt} = f[t, x(t)]$. При $t = t_0$ из (9) получаем $x(t_0) = x_0$.

2. Пусть теперь $x = x(t)$ — решение задачи Коши (6)–(7). Интегрируем

$$dx(t) \equiv f[t, x(t)]dt. \tag{10}$$

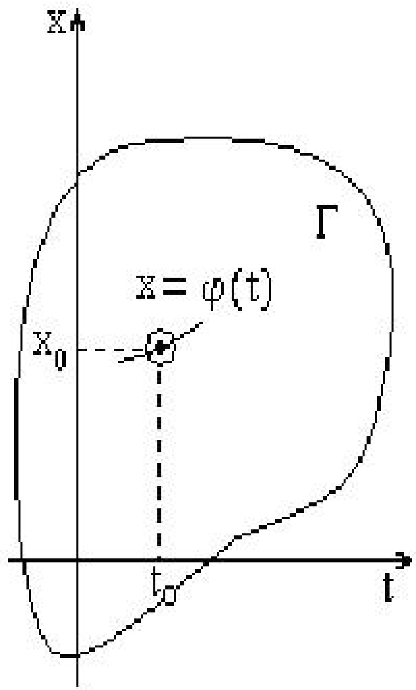
в пределах от t_0 до t получаем

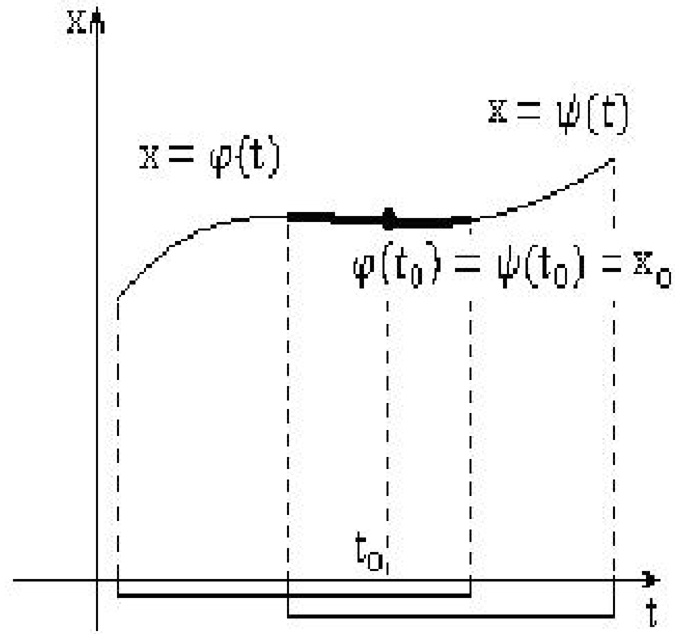
$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau.$$

Учитывая $x(t_0) = x_0$ получаем (9).

Лемма доказана.

§12. Доказательство теоремы Коши.





Пусть $(t_0, x_0) \in \Gamma$. Область Γ открытое множество и (t_0, x_0) содержится в Γ вместе с некоторой своей окрестностью.

Рассмотрим

$$D_r = \{(t, x) \in R^2 : |t - t_0| \leqslant r,\ |x - x_0| \leqslant a\},$$

D_r - компакт (является ограниченным и замкнутым) в Γ. Функции $f(t, x)$ и $f'_x(t, x)$ непрерывны в Γ значит

$$\exists \quad K, M > 0 \quad \forall (t, x) \in D_r \quad |f(t, x)| \leqslant K, \quad |f'_x(t, x)| \leqslant M.$$

Обозначим

$$D_q = \{(t, x) \in R^2 : |t - t_0| \leqslant q,\ |x - x_0| \leqslant a\},$$

$$D_q \subset D_r, \quad 0 < q \leq r.$$

Обозначим

$G_q = \{x(\cdot) \in C(t_0 - q, t_0 + q) : \quad |x - x_0| \leqslant a \quad \forall t \in [t_0 - q, t_0 + q]\ \}$,

G_q — подпространство пространства

$$C = C(t_0 - q, t_0 + q)$$

непрерывных функций $\{x(\cdot)\}$, заданных на отрезке $[t_0 - -q, t_0 + q]$ с метрикой

$$\rho[x_1(\cdot), x_2(\cdot)] = \max_{\tau \in [t_0 - q, t_0 + q]} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|.$$

Графики функций не выходят за пределы прямоугольника D_q. Очевидно, $\forall x(\cdot) \in G_q$ справедливо неравенство $|x(t) - x_0| \leqslant a$.

1. G_q **— замкнуто.** Надо показать, что

$$\forall \quad \{x_n(\cdot)\} \in G_q: \quad x_n(t) \to x(\cdot), \quad n \to \infty$$

следует, что и $x(\cdot) \in G_q$.

- Сходимость в пространстве C является равномерной, следовательно предельная функция $x(\cdot)$ непрерывна, т.е. $x(\cdot) \in C(t_0 - q, t_0 + q)$.
- Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $|x_n(t) - x_0| \leqslant a$ получим $|x(t) - x_0| \leqslant a$.

Значит $x(\cdot) \in G_q$. Замкнутость G_q доказана.

Из замкнутости G_q вытекает полнота G_q как метрического пространства.

2. Введем на множестве G_q оператор $A : G_q \to G_q$

$$A(x(\cdot)) = x^*(\cdot),$$

$$\forall t \in [t_0 - q, t_0 + q] \quad x^*(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau.$$

Покажем, что A **сжимающий** на G_q. Надо показать:

1) Если $x(\cdot) \in G_q$, то $x^*(\cdot) \in G_q$;

2) Если $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in G_q$, то

$$\rho[x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot)] \leq k\rho[x_1(\cdot), x_2(\cdot)],$$

где $0 < k < 1$.

1) Действительно, $x^*(t) \in C(t_0 - q, t_0 + q)$. Далее

$$|x^*(t) - x_0| = |\int_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_{t_0}^{t} |f[\tau, x(\tau)]|\, d\tau| \leqslant K|t - t_0| \leqslant Kq.$$

Чтобы выполнялось равенство $|x^*(t) - x_0| \leq a$ нужно выбрать q таким, что $Kq \leqslant a$, т.е. считать, что

$$q \leqslant \frac{a}{K}.$$

2) Пусть $x_1(t), x_2(t) \in G_q$.

$$|x_1^*(t) - x_2^*(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f\left[\tau, x_1(\tau)\right] \, d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f\left[\tau, x_2(\tau)\right] \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left| f\left[\tau, x_1(\tau)\right] - f\left[\tau, x_2(\tau)\right] \right| \, d\tau \right| . \quad (1)$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$f\left[\tau, x_1(\tau)\right] - f\left[\tau, x_2(\tau)\right] = f_x'(\tau, \theta_\tau) \left[x_1(\tau) - x_2(\tau)\right], \quad (2)$$

$$x_1(\tau) \leq \theta_\tau \leq x_2(\tau), \quad (\tau, \theta_\tau) \in D_q,$$

$$|f_x'(\tau, \theta_\tau)| \leqslant M \quad (\forall \tau \in [t_0 - q, t_0 + q]) .$$

Из (1)—(2) для $t : |t - t_0| \leqslant q$

$$|x_1^*(t) - x_2^*(t)| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} M \left| x_1(\tau) - x_2(\tau) \right| \, d\tau \right| \leqslant M|t - t_0| \times$$

$$\times \max_{t_0 - q \le \tau \le t_0 + q} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \leqslant Mq\rho \left[x_1(\cdot), x_2(\cdot) \right]. \quad (3)$$

Окончательно,

$$\rho \left[x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot) \right] = \max_{t_0 - q \le \tau \le t_0 + q} |x_1^*(\tau) - x_2^*(\tau)| \leqslant Mq\rho \left[x_1(\cdot), x_2(\cdot) \right]$$

или

$$\rho \left[A(x_1(\cdot)), A(x_2(\cdot)) \right] \leqslant Mq\rho \left[x_1(\cdot), x_2(\cdot) \right].$$

В итоге, если взять q, такое, что

$$0 \leqslant q \le r, \quad q \le \frac{a}{K}, \quad q \le \frac{1}{M}$$

то выполняется

$$\rho[x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot)] \leq k\rho[x_1(\cdot), x_2(\cdot)], \quad k = q, \quad 0 < k < 1.$$

Оператор A сжимающий.

Согласно принципу сжатых отображений существует и единственно $\varphi(\cdot) \in G_q$ (в окрестности точки $(t_0, x(t_0))$

$$A(\varphi(\cdot)) = \varphi(\cdot), \varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\left[\tau, \varphi(\tau)\right] d\tau, \quad t \in [t_0 - q, t_0 + q].$$

По лемме функция $\varphi(t)$ является решением задачи Коши.

Теорема доказана.

Замечание. Была доказана локальная теорема Коши. Единственность решения установлена в некоторой окрестности (t_0, x_0). Это **локальная** единственность. Т.е., если два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадают при $t = t_0$, то они совпадают и в некоторой окрестности этой точки.

В условиях теоремы можно доказать свойство **глобальной** единственности.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения уравнения и $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$. Обозначим (α, β) — интервал их совместного определения (пересечение областей определения). Надо доказать, что $\forall t \in (\alpha, \beta)\ x_1(t) = x_2(t)$.

Доказательство.

От противного, предположим существует значение $t = t^* \in (\alpha, \beta)$ и $x_1(t^*) \neq x_2(t^*)$.

Ограничимся случаем, когда $t^* > t_0$ (аналогично можно рассмотреть случай $t^* < t_0$).

Рассмотрим множество

$$T = \{\tau \in [t_0, t^*] : x_1(\tau) = x_2(\tau)\}.$$

Множество T **не пусто**, $t_0 \in N$.

Множество T **замкнуто**. Действительно. Пусть для любого n $\tau_n \in T$ и $\tau_n \to \hat{\tau}$.

Так как $\tau_n \in [t_0, t^*]$, то и $\hat{\tau} \in [t_0, t^*]$. Далее, в силу непрерывности функций $x_1(\tau)$, $x_2(\tau_n)$ при $n \to \infty$ в равенстве $x_1(\tau_n) = x_2(\tau_n)$ имеем

$$x_1(\hat{\tau}) = x_2(\hat{\tau}).$$

Значит $\hat{\tau} \in T$. Замкнутость доказана.

Множество T имеет точную верхнюю границу. Обозначим

$$\overline{\tau} = \sup T.$$

В силу определения и замкнутости T имеем $\overline{\tau} \leqslant t^*$ и $\overline{\tau} \in T$. Точнее $\overline{\tau} < t^*$. (Равенства нет, поскольку $x_1(\overline{\tau}) = x_2(\overline{\tau})$ и по предположению $x_1(t^*) \neq x_2(t^*)$.)

Согласно локальной единственности для $\overline{\tau} < t^*$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \tau \in (\overline{\tau} - \delta, \overline{\tau} + \delta) \quad x_1(\tau) = x_2(\tau),$$

что противоречит определению $\overline{\tau}$:

$$\forall \tau \in (\alpha, \beta) : \tau > \overline{\tau} \quad \Rightarrow \quad x_1(\tau) \neq x_2(\tau).$$

Следовательно, таких точек $t^* \in (\alpha, \beta)$ не существует.

Глобальная единственность доказана.

Замечание. В доказанной теореме условие существования $f'_x(t, x)$ и ее непрерывности можно заменить на условие Липшица: для любого ограниченного замкнутого подмножества $D \subset \Gamma$ существует число

$$L > 0 : \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Замечание. Можно показать, что для существования решения задачи Коши достаточно только непрерывности функции $f(x, y)$ в области Γ. При этом частные производные $f'_x(t, x)$ могут не существовать или не являться непрерывными. Условие непрерывности $f'_x(t, x)$ в теореме обеспечивает единственность.

§13. Дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений.

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка:

$$F(t,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n)}) = 0,$$

функция F – задана, t – независимая переменная, $y(t)$ – искомая функция.

$$(t,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n)}) \in \Gamma \subset R^{n+2}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешимое относительно высшей производной:

$$y^{(n)} = f(t,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n-1)}), \quad (t,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n-1)}) \in \Gamma \subset R^{n+1}$$

Общий вид системы дифференциальных уравнений:

$$F_i(t,\ y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, ..., y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(k_m)}) = 0,$$

$$i = 1,\ 2,\ ..., m$$

Здесь $y_1 = y_1(t),\ y_2 = y_2(t),\ \dots, y_m = y_m(t)$ — искомые функции, $k = (k_1 + k_2 + ... + k_m)$ - порядок системы дифференциальных уравнений.

Системы ДУ, разрешённых относительно старших производных:

$$y_i^{k_i} = f_i(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1-1)}, ..., y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2-1)}, ..., y_m, y_m', ..., y_m^{(k_m-1)}),$$

$$i = 1,\ 2,\ ..., m$$

$y_1 = y_1(t),\ y_2 = y_2(t),\ \dots, y_m = y_m(t)$ — искомые функции,

$k = (k_1 + k_2 + ... + k_m)$ — порядок системы дифференциальных уравнений.

Если

$$\forall i = 1,\ 2,\ ..m, \quad k_i = 1 \quad \text{и} \quad F_i = 0$$

разрешено относительно y_i', то получим систему дифференциальных уравнений в **канонической (нормальной) форме**:

$$y_i' = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_m)$$

$$i = 1,\ 2,\ ..., m$$

Перепишем систему заменяя y на x:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь t — независимая переменная, $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ — искомые функции от t, $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots \quad \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$. Независимая переменная обозначается буквой t и имеет смысл времени.

Системы в нормальной форме, таким образом, характеризуются тремя признаками:

1. число уравнений совпадает с числом искомых функций;
2. все уравнения – только первого порядка;
3. все уравнения разрешены относительно соответствующих производных.

Удобна векторная запись системы (1). Введем обозначения:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Векторная запись системы (1):

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{2}$$

Иногда (2) называют уравнением, понимая под искомой величиной не скалярную, а векторную функцию $X = X(t)$.

Решением системы ДУ в канонической форме $\dot{X} = F(t, X)$ называют любую вектор-функцию

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_n(t))^T,$$

которая при подстановке в систему обращает её в верное тождество по t на некотором интервале (r_1, r_2).

Функция $x_i(t)$ – непрерывно дифференцируема на этом интервале $(i = 1, 2, ..., n)$.

Задача Коши систем ДУ в канонической форме Рассмотрим систему (1)

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, .., x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, .., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(t, x_1, x_2, .., x_n) \end{pmatrix},$$

$$(t, x_1, x_2, ..., x_n) \in \Gamma \subset R^{n+1}.$$

Начальные данные – точка в области Γ

$$\left(t_0, x_1^0, x_2^0, .., x_n^0\right) = \left(t_0, X^0\right).$$

Задача Коши

Найти решение системы (1) $X(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_n(t))^T$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$X(t_0) = X^0,$$

то есть

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

Теорема Коши существования и единственности решения

Теорема 1 *Пусть функции* $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = 1,\ 2,\ ..., n)$, *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, .., x_n)$, $(i, j = 1,\ 2,\ ..., n)$ *в области* Γ *переменных* $t, x_1, x_2, ..., x_n$, *тогда*

1) $\forall (t_0, X^0) \in \Gamma$ *существует решение* $X(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_n(t))^T$ *системы (1), такое что* $X(t_0) = X^0$.

2) Если два решения системы (1) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям, то эти решения совпадают всюду, где они совместно определены (единственность в глобальном смысле).

Общее решение системы в канонической форме $\dot{X} = F(t, X)$ — это семейство вектор-функций

$$X = X(t, C_1, C_2, ..., C_n),$$

($C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольные постоянные) удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\forall (t_0, X^0) \in \Gamma \quad \exists (C_1^0, C_2^0, .., C_n^0) : \quad X(t_0, C_1^0, C_2^0, .., C_n^0) = X^0$

2) функция $X(t) = X(t, C_1^0, C_2^0, .., C_n^0)$, полученная из семейства при этих значениях произвольных постоянных, является решением системы (1) в некотором интервале, содержащем точку t_0.

Частные решения получаются при конкретных значениях $(C_1^0, C_2^0, .., C_n^0)$ из общего решения.

Пример. Модель хищник-жертва.

Математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник-жертва" —

модель Лотки–Вольтерра.

А.Лотка (1925 г.) использовал модель для описания динамики взаимодействующих биологических популяций.

В. Вольтерра (1926 г.) — независимо от Лотки — аналогичные (и более сложные) модели.

Математическая теория биологических сообществ (**математическая экология**).

Два биологических вида совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который назовем **жертвой**.

Другой вид — **хищник** также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида.

караси — щуки, зайцы — волки, мыши — лисы, микробы — антитела

Для определенности: **караси и щуки**.

Караси и щуки живут в изолированном пруду. Среда предоставляет карасям питание в неограниченном количестве, а щуки питаются лишь карасями.

Обозначим

$$x = x(t) \text{ – число карасей,} \qquad y = y(t) \text{ – число щук.}$$

Считаем $x(t)$ и $y(t)$ непрерывными функциями времени t.

Как меняется состояние экосистемы?

$$\frac{dx}{dt} \text{ — скорость изменения численности карасей.}$$

Если ЩУК НЕТ, то число КАРАСЕЙ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ

в соответствии с законом Мальтуса: тем быстрее, чем больше карасей:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad (a > 0),$$

коэффициент a зависит только от условий жизни карасей, их естественной смертности и рождаемости.

$$\frac{dy}{dt} \text{ — скорость изменения числа щук.}$$

Если КАРАСЕЙ НЕТ, то число ЩУК УМЕНЬШАЕТСЯ (у них нет пищи) и они вымирают. Будем считать, что

$$\frac{dy}{dt} = -by, \qquad (b > 0).$$

Взаимодействие двух этих видов моделируется так.

Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций: $-cxy$ $(c > 0)$. Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = ax - cxy.$$

Хищники размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв:

$$\frac{dy}{dt} = -by + dxy,$$

где $d > 0$. Система уравнений — модель Лотки–Вольтерра:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & ax - cxy, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} & = & -by + dxy. \end{cases} \tag{3}$$

В экономике используются подобные (более сложные) модели “хищник–жертва”, в частности, для моделирования **конкурентной борьбы**:

x – число фирм, находящихся на рынке – жертвы (караси),

y – число фирм, решающих задачу захвата рынка и вытеснения с него x фирм – хищники (щуки).

$\triangle$

Сведение ДУ n-го порядка, разрешенных относительно старших производных к системе ДУ в канонической форме

Дано уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{4}$$

Произведём замену:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \\ \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

Заметим, что

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y' = x_2 = f_1(t, x_1, x_2, .., x_n) \\ \dot{x}_2 = y'' = x_3 = f_2(t, x_1, x_2, .., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n = f_{n-1}(t, x_1, x_2, .., x_n) \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = f(t, x_1, x_2, .., x_n) \end{cases} \tag{5}$$

Если $X(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_n(t))$- решение системы (5), то $y = x_1(t)$ — является решением уравнения (4).

Наоборот, если $y = y(t)$- решение уравнения (4), то

$$(x_1(t), x_2(t), .., x_n(t)) = (y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t))$$

— решение системы (5).

Задача и теорема Коши для уравнения n-го порядка

Дано уравнение (4) $y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Требуется найти решение $y = y(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Теорему существования и единственности этой задачи получим как следствие теоремы Коши для системы уравнений. С этой целью преобразуем уравнение (4) в систему уравнений (5)

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \\
\dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, .., x_n)
\end{cases}
$$

Правые части первых $(n-1)$ уравнений системы (5) удовлетворяют условиям теоремы во всём пространстве, поэтому ограничения коснутся только последнего уравнения. Приходим к следствию для уравнения:

Если функция $f(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна в области Γ переменных $t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ вместе с $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то задача Коши имеет решение для любой точки этой области, единственное в глобальном смысле.

Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях можно понизить порядок уравнения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

1). Уравнение не содержит искомой функции и нескольких её производных:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{7}$$

Заменой $y^{(k)} = z, \quad F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ понижается порядок уравнения на k единиц. При этом

$$y^{(k)}(x) = z(x)$$

$$y^{(k+1)}(x) = z'(x)$$

$$\dots$$

$$y^{(n)}(x) = z^{(n-k)}(x)$$

Общее решение уравнения $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ выглядит как $z = z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, чтобы найти общее решение уравнения (7), делаем следующее:

$$
\begin{aligned}
y^{(k)}(x) &= z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \\
y^{(k-1)}(x) &= \int z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})dx + C_{n-k+1} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

и так далее, в результате получим общее решение уравнения (7) в виде $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

2). Уравнение не содержит явно независимой переменной:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (8)$$

Введение новой искомой функции p и нового аргумента y по формуле $y' = p(y)$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

$$y' = p$$

$$y'' = (y'_x)'_x = p'_x = (p(y))'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = ((y'_x)'_x)'_x = \left(p\frac{dp}{dy}\right)'_x = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)p$$

$$\ldots$$

и так далее.

Выражение $\frac{d^k y}{dx^k}$ будет содержать производные функции $p(y)$ не выше $(k-1)$-го порядка, что понижает порядок (8) на единицу.

Общее решение уравнения

$$\tilde{F}\left(y, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

запишется как

$$p = p\left(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right).$$

А общее решение исходного уравнения (8) находится так

$$\frac{dy}{dx} = p\left(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) \Rightarrow y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

3). Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\left(\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\right) = 0. \qquad (9)$$

Тогда функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (9) в интервале $(r1, r2)$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \equiv C$$

в этом интервале. Получаем первый интеграл

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C$$

уравнения (9) и понижаем его порядок на единицу (о первых интегралах см. далее). Получим общее решение (9) $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

4). Уравнение вида (6)

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

левая часть — однородная функция переменных $y, y', \dots, y^{(n)}$,

$$\forall t \quad F\left(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$$

.

Вводим новую искомую функцию $z = z(x)$, такую что $y' = yz$. Далее

$$y'' = (y')' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = (y'')' = \left(y(z^2 + z')\right)' = y'(z^2 + z') + y(2z \cdot z' + z'')$$

$$= yz(z^2 + z') + y(2z \cdot z' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

Имеем

$$F\left(x, y, y\cdot z\,,\ y(z^2+z'),\ y(z^3+3zz'+z''),\ \ldots\right)=0,$$

то есть

$$y^m\tilde{F}(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})=0.$$

При $m>0$ $y=0$ – решение, $m<0$ $y=0$ – не решение. Имеем

$$\tilde{F}(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})=0 \Rightarrow z=z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

Значит $y'=y\cdot z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ и

$$\frac{dy}{y}=z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx$$

$$\ln|y|=\int z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx+\ln C_n$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y=C_n e^{\int z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx}.$$

Первые интегралы системы дифференциальных уравнений и понижение порядка.Симметричная запись системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему автономную систему ДУ.

$$\dot{X} = F(X). \tag{10}$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$

$$F(X) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))^T.$$

В скалярной форме система (10) имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

Функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывными вместе с $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ $\quad (i, k = \overline{1, n})$ в Γ пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение. **Первым интегралом системы** $\dot{X} = F(X)$ в области $G \subset \Gamma$ называется функция $U(X) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

1) $U(X)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n})$ в области G.

2) Для любого решения $X = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, график которого не покидает области G, справедливо соотношение:

$$U(\varphi(t)) = U\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) = const.$$

Замечания:

1). Предполагаем, что $U(X)$ - не есть тождественная константа.

2). При замене одного решения $X = \varphi^{(1)}(t)$ другим $X = \varphi^{(2)}(t)$ величина $U(\varphi(t))$ может измениться.

3). Если $U(X)$ - первый интеграл, то первым интегралом называют также уравнение $U(X) = C$.

Теорема. ***Критерий первого интеграла.***

Непрерывно дифференцируемая функция на G является первым интегралом системы

$\dot{X} = F(X)$ на $G \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \in G \subset \Gamma \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(X) \cdot f_i(X) = 0$.

Доказательство.

Возьмём $\xi \in G$, обозначим через $X = \varphi(t, \xi)$ - решение системы $\dot{X} = F(X)$, с начальным условием $\varphi(0, \xi) = \xi$.

Вычисляем

$$\frac{dU}{dt}(\varphi(t,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\varphi(t,\xi)) \cdot \frac{d\varphi_i(t,\xi)}{dt},$$

но, так как $X = \varphi(t, \xi)$ - решение, то

$$\frac{d\varphi_i(t,\xi)}{dt} = f_i(\varphi(t,\xi)) = f_i(\varphi_1(t,\xi), \varphi_2(t,\xi), \ldots, \varphi_n(t,\xi)).$$

Значит

$$\frac{dU}{dt}(\varphi(t,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\varphi(t,\xi)) \cdot f_i(\varphi(t,\xi)).$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $U(X)$- первый интеграл, тогда $\forall t \quad \frac{dU}{dt}(\varphi(t,\xi)) = 0$.

Возьмём $t = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\varphi(0,\xi)) \cdot f_i(\varphi(0,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\xi) \cdot f_i(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in G.$$

Значит (роль X играет ξ) выполняется

$$\forall X \in G \ \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(X) \cdot f_i(X) = 0.$$

$(\Leftarrow)$ Пусть $\forall X \in G \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(X) \cdot f_i(X) = 0$. Заметим, что левая часть равенства – полная производная функции $U(\varphi(t,\xi))$, $X = \varphi(t,\xi)$. Теперь

$$\frac{dU}{dt}\left(\varphi(t,\xi)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\varphi(t,\xi)) \cdot f_i(\varphi(t,\xi)) = 0.$$

Отсюда $U(\varphi(t,\xi)) = const$. (Таким образом, $U(X)$- первый интеграл).

Теорема доказана.

Если $X_0 \in \Gamma$ и $F(X_0) = 0$, точка X_0 называется точкой **покоя** или равновесия. Дело в том, что система имеет решение $X \equiv X_0$.

Далее изучаем первые интегралы в окрестности точки X_0, для которых $F(X_0) \neq 0$.

<u>Определение</u>. Первые интегралы $U_1(X), U_2(X), \ldots, U_m(X)$ $(m<n)$ называются независимыми в некоторой окрестности точки X_0, для которой $F(X_0) \neq 0$, если матрица, составленная из частных производных этих первых интегралов $\left\{\frac{dU_j}{dx_i}(X_0)\,, \quad 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq n\right\}$ имеет ранг m.

Теорема.

Если известны m $(m < n)$ независимых в точке $X^0 \in \Gamma$ первых интегралов системы (10) , то порядок системы можно понизить на m единиц в некоторой окрестности точки X^0.

Доказательство. Без ограничения общности возьмём отличный от нуля определитель m-го порядка, составленный из первых m столбцов матрицы $\left\{\frac{dU_j}{dx_i}(X_0)\right\}$, то есть рассматриваем

$$\det\left\{\frac{dU_j}{dx_i}(X_0)\,, \quad 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq m\right\} \neq 0$$

.

Проведём замену переменных:

$$y_1 = U_1(X)$$

$$y_2 = U_2(X)$$

$$\dots$$

$$y_m = U_m(X)$$

$$y_{m+1} \equiv x_{m+1}$$

$$\dots$$

$$y_n \equiv x_n$$

Замена осуществима, если якобиан преобразования отличен от нуля в некоторой окрестности точки .

Якобиан имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_1}{dx_m}(X_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \frac{dU_1}{dx_n}(X_0) \\ \frac{dU_2}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_2}{dx_m}(X_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \frac{dU_2}{dx_n}(X_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dU_m}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_m}{dx_m}(X_0) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \frac{dU_m}{dx_n}(X_0) \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_1}{dx_m}(X_0) \\ \frac{dU_2}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_2}{dx_m}(X_0) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{dU_m}{dx_1}(X_0) & \cdots & \frac{dU_m}{dx_m}(X_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Якобиан отличен от нуля не только в точке X^0, но и в некоторой окрестности точки X^0, так как элементы якобиана являются непрерывными функциями.

В переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ система (11) примет вид

$$\dot{y}_i = g_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \overline{i = 1, n}. \tag{12}$$

Если $i = \overline{1, m}$, то по критерию первого интеграла имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dU_i(X)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i(X)}{\partial x_i} f_i(X) = 0,$$

поэтому получаем $y_1 = C_1, y_2 = C_2, \ldots, y_m = C_m$.

Система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_{m+1} = g_{m+1}\left(C_1, C_2, \ldots, C_m, y_{m+1}, \ldots, y_n\right) \\ \dot{y}_{m+2} = g_{m+2}\left(C_1, C_2, \ldots, C_m, y_{m+1}, \ldots, y_n\right) \\ \ldots \\ \dot{y}_n = g_n\left(C_1, C_2, \ldots, C_m, y_{m+1}, \ldots, y_n\right) \end{cases},$$

т. е. получили систему порядка $n - m$.

Теорема доказана.

В случае, когда $m = n - 1$, т. е.

$\dot{y}_n = g_n\left(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, y_n\right)$, нужно решить одно дифференциальное уравнение.

В случае, когда $m = n$, $U_1 = C_1, U_2 = C_2, \ldots, U_n = C_n$.

В общем случае решения находятся в виде:

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_{m+1}\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n\right) \\ y_{m+2} = y_{m+2}\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n\right) \\ \ldots \\ y_n = y_n\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n\right) \end{cases}.$$

Как искать первые интегралы.

От системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

перейдем к системе

$$\begin{cases} dt = \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ dt = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dt = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \end{cases}$$

получим систему в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(X)} = \frac{dx_2}{f_2(X)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(X)}.$$

Решения дадут первые интегралы. Иногда получается найти решения только части уравнений, тогда мы получаем соответственно столько же и первых интегралов.

Замечание.

Если функция $V\left(U_1, U_2, \ldots, U_n\right)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial V}{\partial U_j}\quad j = \overline{1, m}$ в «достаточно большой» области, а $U_1(X), U_2(X), \ldots, U_m(X)$ — первые интегралы системы $\dot{X} = F(X)$, то и функция $V\left(U_1(X), U_2(X), \ldots, U_n(X)\right)$ — первый интеграл. («Достаточно большая» область – туда входят все $U_1(X), U_2(X), \ldots, U_m(X)$).

Сведение системы дифференциальных уравнений к одному уравнению

Пусть дана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}. \tag{13}$$

Возьмём первое уравнение, продифференцируем его n раз, заменяя производные $\frac{dx_i}{dt} \quad i = \overline{1, n}$ правыми частями системы.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i = f_2^* \left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial f_2^*}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2^*}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_2^*}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2^*}{\partial x_i} f_i = f_3^* \left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

И далее

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = f_{n-1}^* \left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = f_n^* \left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right). \qquad (14)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \frac{dx_1}{dt^2} = f_2^*(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_1^{n-1}}{dt^{n-1}} = f_{n-1}^*(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{15}$$

Предположим, что выполнены условия, при которых эта система определяет $x_2, x_3, \dots, x_n$, т.е.

$$\begin{cases} x_2 = g_2^*(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = g_n^*(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \end{cases} \tag{16}$$

Тогда, подставив их в уравнение (14), получим уравнение n-го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right). \tag{17}$$

Пусть найдено общее решение уравнения

$$x_1 = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Подставляя эту функцию в формулы (16), вычисляем $x_2, x_3, \ldots, x_n$ как функции $t, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Вместе с функцией

$$x_1 = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

они составляют общее решение системы (13).

§14. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Линейное неоднородное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \tag{1}$$

где $a_1(t),\ a_2(t),\ ..., a_n(t)$ - коэффициенты,
$f(t)$ - неоднородность, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$.

Уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0. \tag{2}$$

— линейное однородное, соответствует уравнению (1).

Линейные однородные уравнения всегда имеют тривиальное решение $y \equiv 0$.

Предполагается, что $a_i(t) \quad i = \overline{1, n}$ и $f(t)$ - непрерывные на $t \in (r_1, r_2)$, тогда в области Γ:

$$t \in (r_1, r_2),\ y \in (-\infty, +\infty),\ y' \in (-\infty, +\infty),\ \ldots,\ y^{(n-1)} \in (-\infty, +\infty),$$

будут выполняться условия теоремы Коши, т. е. начальная задача Коши с любой точкой

$$(t_0, y_0, y_0', , y_0^{(n-1)}) \quad (t \in (r_1, r_2))$$

однозначно разрешима.

Теорема. *(принцип суперпозиции)*

Пусть в уравнении (1)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(t), \quad \alpha_i = const$$

$(f(t)$ - линейная комбинация $f_i(t))$. Пусть $y = \varphi_i(t)$ - решения следующих уравнений

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f_i(t) \quad i = \overline{1, n},$$

Тогда $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(t)$ является решением уравнения (1).

Доказательство.

Сделаем подстановку. Вместо y везде подставим $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)$. Получаем следующее

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(t)\right)^{(n)} + a_1(t)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(t)\right)^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+a_{n-1}(t)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(t)\right)' + a_n(t)\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i^{(n-1)}(t) + ... +$$

$$+ a_{n-1}(t) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i'(t) + a_n(t) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\alpha_i \varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t) \alpha_i \varphi_i^{(n-1)}(t) + ... +$$

$$+ a_{n-1}(t) \alpha_i \varphi_i'(t) + a_n(t) \alpha_i \varphi_i(t) \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Big(\varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + ... +$$

$$+ a_{n-1}(t) \varphi_i'(t) + a_n(t) \varphi_i(t) \Big) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(t) = f(t)$$

Учитываем

$$\varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t) \varphi_i'(t) + a_n(t) \varphi_i(t) = f_i(t), \quad i = \overline{1, n}$$

Теорема доказана.

Следствия.

Следствие 1.

Линейная комбинация решений линейного однородного уравнения есть решение этого уравнения

(следует положить $f_i(t) \equiv 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$, следовательно $f(t) \equiv 0$).

Следствие 2.

Разность двух решений линейного неоднородного уравнения является решением соответствующего однородного уравнения.

(Нужно положить $m = 2, \quad f_1 = f_2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1$).

Следствие 3.

Пусть в уравнении

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)z' + a_n(t)z = f_1(t) + i \cdot f_2(t), \qquad (3)$$

где $a_k(t) \quad (k = \overline{1, n}),\ f_1(t),\ f_2(t)$ - действительные функции.

Тогда $z = \varphi_1(t) + i \cdot \varphi_2(t)$ - решение уравнения (3) $\Leftrightarrow$

$y = \varphi_j(t) \quad j = 1,\ 2$ - решения следующих уравнений

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f_j(t) \quad j = 1,\ 2.$$

(Схема доказательства:

$\Rightarrow$ по условию равенства комплексных чисел, т. е. подставить z в уравнение (3) и выделить действительную и мнимую часть.

$\Leftarrow$ из теоремы о суперпозиции. Нужно положить $B = 2, \quad \alpha_1 = 1,$ $\alpha_2 = i$)).

Однородные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Определение. Система функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно зависима на интервале (r_1, r_2), если существуют постоянные C_1, C_2, $\ldots, C_n$ такие, что $C_1^2 + C_2^2 + \ \ldots + C_n^2 \neq 0$ и $\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(t) \equiv 0$.

Если же тождество $\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(t) \equiv 0$ влечёт за собой равенство

$$C_1^2 + C_2^2 + \ \ldots + C_n^2 = 0,$$

то система функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно независима.

Определитель Вронского:

$$W(t) = W\left[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)\right] =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Теорема.

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1.

Если система функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), ...,$ $\varphi_n(t)$ линейно зависима на интервале (r_1, r_2), то $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) = 0 \quad (W(t) \equiv 0)$.

Утверждение 2 .

Если система решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), ...,$ $\varphi_n(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка линейно независима на интервале (r_1, r_2), то $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) \neq 0$

Доказательство.

Утверждение 1.

Так как система функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно зависима, то существуют постоянные $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$ такие, что $C_1^2+C_2^2+\ \ldots+C_n^2 \neq 0$ и $\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(t) \equiv 0$. Теперь продифференцируем это тождество $(n-1)$ раз

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i'(t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Зафиксируем t. Посмотрим как на систему алгебраических линейных уравнений относительно $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$. В силу того, что $C_1^2+C_2^2+\ \ldots+$

$C_n^2 \neq 0$ (т. е. имеется ненулевое решение), то определитель системы равен нулю, то есть $W(t) \equiv 0$.

Утверждение 2.

От противного.

Предположим, что $\exists t_0 \in (r_1, r_2) \quad W(t_0) = 0$. Возьмём t_0 и подставим в систему (4) алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, ..., C_n.

Так как $W(t_0) = 0$, то кроме тривиального решения есть и другое $\exists\ \bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, ..., $\bar{C}_n : \bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2 + \ ... + \bar{C}_n^2 \neq 0$.

1). $\quad \bar{y} = \bar{C}_1\varphi_1(t) + \bar{C}_2\varphi_2(t) + ... + \bar{C}_n\varphi_n(t)$ - решение линейного однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$, так как $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$ - решения этого уравнения. (по следствию 1 из теоремы о принципе суперпозиции).

2). Подставим $\bar{y}$ по очереди в уравнения системы (4):

$$\begin{cases} \bar{y}(t_0) = 0 \\ \bar{y}'(t_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}.$$

То есть $\bar{y}$ удовлетворяет нулевым начальным условиям задачи Коши. Этим же условиям удовлетворяет тривиальное решение $y \equiv 0$. В силу единственности решения начальной задачи Коши, получаем $y \equiv \bar{y}$, то есть $\bar{C}_1\varphi_1(t) + \bar{C}_2\varphi_2(t) + ... + \bar{C}_n\varphi_n(t) \equiv 0$. Из $\exists\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2,\ ...,\ \bar{C}_n$: $\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2 + \ ... + \bar{C}_n^2 \neq 0$ и последнего тождества, получается, что $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$ - линейно зависимы.

Получили противоречие.

Теорема доказана.

Следствие.

Определение. Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$$

называется любая система из n линейно независимых решений этого уравнения.

Критерий фундаментальности системы решений.

1). Если система решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), ...,$ $\varphi_n(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$$

линейно зависима, то $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) = 0 \quad (W(t) \equiv 0)$.

2). Если система решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), ...,$ $\varphi_n(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$$

линейно независима, то $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) \neq 0$.

$$W(t_0) = 0 \Rightarrow \varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$$ – не ФСР.

$$W(t_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$$ – ФСР.

Теорема. *Об общем виде решений линейных однородных уравнений n-го порядка.*

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \tag{5}$$

$a_1(t),\ a_2(t),\ ..., a_n(t)$- определены и непрерывны на (r_1, r_2), тогда

1). это уравнение имеет ФСР

2). если $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ ..., \varphi_n(t)$ - ФСР, то любое решение $y = y(t)$ уравнения представимо в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t)$$

где C_i – постоянные.

Доказательство.

Пункт 1.

Берем определитель Δ_0 ненулевой:

$$\Delta_0 = \det \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

Имеется n задач Коши:

$y = \varphi_k(t), \quad k = 1,\, 2,\, ..,\, n \quad t_0 \in (r_1, r_2)$ начальные условия

$$\begin{cases} \varphi_k(t_0) = a_{1k} \\ \varphi_k'(t_0) = a_{2k} \\ \\ \varphi_k^{(n-1)}(t_0) = a_{nk} \end{cases}$$

.

$\forall k = 1,\, 2,\, ..,\, n$ задача с данными начальными условиями однозначно разрешима.

Получаем $\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ...,\, \varphi_n(t)$ - n решений уравнения (5), удовлетворяющих начальным условиям. Определитель Вронского $W(t)$ для этих решений при $t = t_0$ совпадает с Δ_0, и, следовательно, отличен от нуля. Поэтому наши решения линейно независимы и образуют ФСР. Т. к. мы можем бесконечно многими способами выбрать Δ_0, то и ФСР бесконечно много.

<u>Пункт 2.</u>

$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots,\ \varphi_n(t)$ - какая-нибудь ФСР , $y = y(t)$ - произвольное решение уравнения (5), взяв произвольно $t_0 \in (r_1, r_2)$, составим систему уравнений для нахождения величин $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(t) = y(t_0) \\ \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i'(t) = y'(t_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(t_0) \end{cases} . \tag{6}$$

Определитель данной системы – определитель Вронского W для данной ФСР в точке t_0.

$\forall t \in (r_1, r_2)\ \ W(t) \neq 0 \ \Rightarrow\ W(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2,\ \ldots,\ \bar{C}_n$ - решение (единственное) системы (6). Обозначим $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \varphi_i(t)$.

1). $\bar{y} = \bar{y}(t)$ - решение уравнения (5)

2). в силу системы (6):

$$\bar{y}(t_0) = y(t_0)$$

$$\bar{y}'(t_0) = y'(t_0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{y}^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}(t_0)$$

3). $y = y(t)$ - также решение уравнения (5)

4). $\bar{y}(t) \equiv y(t)$ на (r_1, r_2) в силу единственности решения задачи Коши.

$\exists\ \bar{C}_1, \bar{C}_2,\ \ldots,\ \bar{C}_n\ \ \ y = y(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \varphi_i(t)$. (т. е. любое решение уравнения (5) представимо в данном виде). **Теорема доказана.**

Теорема. *Об общем виде решений линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.*

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \tag{7}$$

$a_1(t),\ a_2(t),\ ..., a_n(t)$- определены и непрерывны на (r_1, r_2).

Пусть $y = \bar{y}(t)$ - какое-то частное решение уравнения (7),

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), ...,\ \varphi_n(t)$$

- какая-нибудь ФСР для соответствующего однородного уравнения.

Тогда любое решение исходного уравнения (7) представимо в виде:

$$y = y(t) = \bar{y}(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t),$$

где C_i – постоянные.

Доказательство.

Так как $y = y(t)$ и $y = \bar{y}(t)$ - решения исходного неоднородного уравнения (7), то их разность $(y(t) - \bar{y}(t))$- решение соответствующего однородного уравнения. По теореме об общем виде решений однородного уравнения получаем, что

$$\exists\ \bar{C}_1,\ \bar{C}_2,\ ...,\ \bar{C}_n - const \quad y(t) - \bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \varphi_i(t).$$

Отсюда сразу получается, что $\quad y(t) = \bar{y}(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i \varphi_i(t).$

Теорема доказана.

Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с помощью частных решений.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \tag{8}$$

и известно его нетривиальное частное решение $y = \varphi(t)$, тогда проведём замену переменных

$$y = \varphi(t)z, \tag{9}$$

где $z = z(t)$ - новая искомая функция.

Можно понизить порядок исходного ДУ (8) на единицу, причём новое ДУ для z также будет линейным однородным.

Докажем, что уравнение относительно переменной z имеет вид:

$$b_0(t)z^{(n)} + b_1(t)z^{(n-1)} + ... + b_{n-1}(t)z' + b_n(t)z = 0 \qquad (10)$$

причём $b_0(t) = \varphi(t); \quad b_n(t) \equiv 0.$

Подставим в уравнение (8) выражение (9) и сгруппируем слагаемые, содержащие производные от z одного порядка.

Учитывая, что

$$y^{(k)} = \varphi(t)z^{(k)} + \ldots + \varphi^{(k)}(t)z,$$

где в ненаписанных членах содержатся производные z не выше $(k-1)$.

Отсюда вытекает, что уравнение для z примет вид (10), причём $b_0(t) = \varphi(t)$.

Докажем, что $b_n(t) \equiv 0$.

Если $y = \varphi(t)z$ - решение уравнения (8), то z – решение уравнения (9).

При $z = 1$ получаем $y = \varphi(t)$. Эта функция является решением уравнения (8). Значит $z = 1$ – решение уравнения (10). Подставляя в уравнение (10) $z = 1$, получим $b_n(t) \cdot 1 = 0 \Rightarrow\ b_n(t) \equiv 0$.

Если надо получить уравнение со старшим коэффициентом 1, то поделим (10) на $b_0(t) = \varphi(t)$, рассматривая промежуток, где $\varphi(t) \neq 0$.

Замена $z' = u$ в уравнении (10) приводит к

$$\varphi(t)u^{(n-1)} + b_1(t)u^{(n-2)} + ... + b_{n-1}(t)u = 0 \qquad (11)$$

т. е. получили линейное уравнение $(n-1)$ порядка. Можно привести его к стандартному виду, поделив его на $\varphi(t)$, рассматривая промежуток, где $\varphi(t) \neq 0$.

Если найдено нетривиальное решение $u = \psi(t)$ уравнения (11), то вычисляется

$z = \int \psi(t)dt$, $y = \varphi(t) \int \psi(t)dt$.

Это новое решение уравнения (8) и решение $\varphi(t)$ линейно независимы, так как $\psi(t)$ нетривиально (т. е. $\int \psi(t)dt$ - не $const$).

Зная два линейно независимых решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ уравнения (8), можно понизить его порядок на две единицы.

Действительно, функция z, определяемая соотношением

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)z(t),$$

должна быть решением уравнения (10). Поэтому

$$u = z' = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'$$

является известным нетривиальным решением (11), что позволяет понизить на единицу его порядок, сохраняя линейность.

Знание r линейно независимых решений $(r \leq n-1)$ даёт возможность понизить порядок на r единиц, а при $r = n$ сразу получается общее решение уравнения (8).

Запись линейного уравнения в операторной форме

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0.$$

Пусть функция $y(x)$ – n раз дифференцируема в интервале (r_1, r_2), а

$$L(y(x)) := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y. \tag{12}$$

Символом L обозначим:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x).$$

и будем называть **линейным дифференциальным оператором** n**-го порядка**. В частности, линейный дифференциальный оператор 2-го порядка имеет вид

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x).$$

Замечание. Хотя структура решений линейного однородного уравнения проста (линейная комбинация решений ФСР), однако фундаментальные системы решений эффективно находятся лишь для уравнений с ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

§15. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{13}$$

где $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$$\Gamma: \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty, \qquad -\infty < y' < \infty.$$

Все решения уравнения (13) определены при всех $x \in \mathbb{R}$.

Справедливы все утверждения и теоремы, сформулированные ранее для линейных уравнений.

Следуя **Эйлеру**, будем искать решение уравнения (13) в виде

$$y = e^{\lambda x}, \qquad \text{где } \lambda \text{— вещественное или комплексное число.}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

$$L(y(x)) = L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

$L(e^{\lambda x}) = 0$, т.е. $e^{\lambda x}$ является решением (13), тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) называется **характеристическим уравнением** линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка (13), а многочлен

$$s(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

характеристическим многочленом уравнения (13).

А. Случай простых действительных корней характеристического уравнения (14): $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$

Общее решение уравнения (13):

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Действительно,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_1 x} \quad — \quad \text{ФСР уравнения (13)},$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix},$$

и при $x = 0$ определитель

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

▲

Б. Случай кратного корня уравнения (14): λ_0 – корень кратности 2.

ФСР уравнения (13):

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_0 x}.$$

З а д а н и е: проверить, что $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения (13).

Установим линейную независимость этих функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix}, \quad \text{при } x = 0 \quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Тогда общее решение запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}. \tag{15}$$

▲

B. Случай комплексных корней уравнения (14): $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

ФСР уравнения (13) составляют функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_1 x}.$$

Уравнение (13) имеет действительные коэффициенты. Хотелось бы иметь действительнозначное решение. По формуле Эйлера

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x \pm i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Вместо ФСР из комплекснозначных функций $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$ составим ФСР из **действительнозначных** функций $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

З а д а н и е: проверить, что $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$:
1) решения; 2) линейно независимы.

Общее решение в этом случае имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad \blacktriangle$$

Пример. $y'' + y' - 2y = 0$. Характер. уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x. \qquad \triangle$$

Пример. $y'' - 2y' = 0$. $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}. \qquad \triangle$$

Пример. $y'' - 2y' + y = 0$. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_0 = 1$ — кратный корень. Общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x. \qquad \triangle$$

Пример. $y'' + 4y' + 13y = 0$. $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$. Общее решение имеет вид

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \qquad \triangle$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{16}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$y = e^{\lambda x}, \qquad \text{где } \lambda \text{ – вещественное или комплексное число.}$$

$y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения (16), тогда и только тогда, когда λ является корнем **характеристического уравнения**

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{17}$$

Характеристический многочлен, стоящий в левой части уравнения (17), является многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами. Из курса алгебры известно, что у такого многочлена имеется ровно n корней.

Структура ФСР зависит от свойств корней характеристического уравнения. Пусть λ_j – корень характеристического уравнения. Возможны случаи:

А. λ_j – простой действительный корень, тогда в ФСР ему соответствует решение $y_j = e^{\lambda_j x}$ уравнения (16).

Б. λ_j – действительный корень кратности k, тогда ему соответствует k решений:

$$y_{j_1} = e^{\lambda_j x}, \quad y_{j_2} = xe^{\lambda_j x}, \quad \ldots, \quad y_{j_k} = x^{k-1}e^{\lambda_j x}.$$

В. λ_j – простой комплексный корень, $\lambda_j = \alpha + \beta i$. Тогда $\overline{\lambda_j} = \alpha - \beta i$ — простой корень характеристического уравнения.

Паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствуют **два действительных решения** вида

$$y_{j_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{j_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Г. λ_j – комплексный корень кратности k, $\lambda_j = \alpha + \beta i$, тогда $\overline{\lambda_j} = \alpha - \beta i$ — сопряженный корень кратность k в характеристическом уравнении. **Паре комплексно сопряженных корней** $\alpha \pm \beta i$ кратности k соответствуют $2k$ **действительных решения** вида

$$y_{j_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{j_2} = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \ldots, \quad y_{j_k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{j_{k+1}} = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_{j_{k+2}} = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \ldots, \quad y_{j_{2k}} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Пример. Решить уравнение

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = -1 - i$. Действительному корню $\lambda_1 = -2$ соответствует решение

$$y_1 = e^{-2x},$$

паре комплексно сопряженных корней $-1 \pm i$ соответствуют решения

$$y_2 = e^{-x}\cos x, \qquad y_3 = e^{-x}\sin x.$$

Решения y_1, y_2, y_3 составляют ФСР. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}\cos x + C_3 e^{-x}\sin x. \qquad \triangle$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{18}$$

где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, функция $f(x)$ непрерывна на интервале (r_1, r_2).

Общее решение уравнения (18) имеет структуру:

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_{\text{ч.н.}}.$$

✓ Находить общее решение $C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ однородного уравнения умеем.

✓ $y_{\text{ч.н.}}$ — методом вариации произвольных постоянных Лагранжа.

Специальный вид правой части уравнения (18).

Функцию вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x), \tag{19}$$

где α и β – действительные числа, а $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, называют **действительным квазимногочленом**.

Уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x),$$

где $\beta \neq 0$, имеет частное решение вида

$$y_{\text{ч.н.}} = x^s e^{\alpha x}[R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x], \tag{20}$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени не выше m — наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Число s равно нулю, если $\gamma = \alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (17) и равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае.

Коэффициенты многочленов $R_m(x)$ и $T_m(x)$ находятся подстановкой $y_{\text{ч.н.}}$ (20) в уравнение (18) и приравниванием коэффициентов при подобных членах.

Если $\beta = 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha x} P_m(x),$$

имеет частное решение вида

$$y_{\text{ч.н.}} = x^s e^{\alpha x} R_m(x), \tag{21}$$

где $R_m(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени m, а s равно нулю, если $\gamma = \alpha$ не является корнем характеристического уравнения (17) и равно кратности корня α в противном случае.

Если правая часть уравнения (18) равна сумме нескольких действительных квазимногочленов, то частное решение отыскивается по Принципу суперпозиции: если в уравнении (18) правая часть $f(x)$ представляет собой сумму

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то находят частное решение $y_1(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x),$$

и $y_2(x)$ — частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_2(x),$$

тогда $y_{\text{ч.н.}} = y_1(x) + y_2(x)$ является частным решением уравнения (18) с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \qquad (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \qquad (\lambda - 3)^2 = 0.$ корень $\lambda = 3$ двойной кратности.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,\qquad (\lambda - 3)^2 = 0.\qquad$ корень $\lambda = 3$ двойной кратности.

Общее решение однородного уравнения $\qquad y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \qquad (\lambda - 3)^2 = 0.$ корень $\lambda = 3$ двойной кратности.

Общее решение однородного уравнения $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

Для $f_1(x) = xe^{3x}$ число $\gamma = 3$,

для $f_2(x) = e^{3x}\cos 2x$ число $\gamma = -1 + 2i$. Так как эти числа различны, надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = e^{-x}\cos 2x.$$

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} \tag{22}$$

$\gamma = 3, \qquad s = 2, \qquad m = 1, \qquad y_1 = x^2(Ax + B)e^{3x}.$

Подставим $y_1(x)$ в уравнение (22) и определим $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$.

Итак, $y_1 = \frac{1}{6}\, x^3 e^{3x}$.

$$y'' - 6y' + 9y = e^{-x}\cos 2x. \tag{23}$$

$\gamma = -1 + 2i, \qquad s = 0, \qquad m = 0, \qquad y_2 = e^{-x}(C\cos 2x + D\sin 2x).$

Подставим $y_2(x)$ в уравнение (23) и определим $C = 0.03$, $D = -0.04$.

Итак, $y_2 = \frac{1}{100}\, e^{-x}(3\cos 2x - 4\sin 2x)$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = y_0 + y_1 + y_2 =$$

$$= (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{6}\, x^3 e^{3x} + \frac{1}{100}\, e^{-x}(3\cos 2x - 4\sin 2x). \qquad \triangle$$

Пример. Линейная модель динамики ВВП

описывается уравнением:

$$T\frac{d^2X}{dt^2} + (Tn+1)\frac{dX}{dt} + (n - a\mu)X = \mu A(t),$$

где $X(t)$ — валовый внутренний продукт, T — лаг (запаздывание) фондообразования, $A(t)$ — внешние инвестиции, μ — средняя капиталоотдача, a — средний норматив отчислений на капитальные вложения, n — средняя норма амортизации основных производственных фондов.

Характеристическое уравнение

$$T\lambda^2 + (Tn+1)\lambda + n - a\mu = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{Tn+1}{2T} \pm \frac{1}{2T}\sqrt{(Tn+1)^2 - 4T(n-a\mu)} =$$

$$= -\frac{Tn+1}{2T} \pm \frac{1}{2T}\sqrt{(Tn-1)^2 + 4Ta\mu}.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$X_0 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Если $n > a\mu$, то $\lambda_{1,2} < 0$, значит в ситуации отсутствия внешних инвестиций ($A(t) \equiv 0$, однородное уравнение) ВВП $X(t)$ сокращается.

Если $n < a\mu$, то $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$, значит при отсутствии внешних инвестиций и при $C_1 \neq 0$ ВВП $X(t)$ растет.

При $n = a\mu$ находим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\left(n + \frac{1}{T}\right)$. В этом случае в ситуации отсутствия внешних инвестиций ВВП стабилизируется.

З а д а н и е. Проанализируйте поведение ВВП (величины $X(t)$), если функция внешних инвестиций $A(t)$ имеет вид квазимногочлена. Рассмотрите случаи $A(t) \equiv d$, $A(t) = ct + d$. $\triangle$

Пример. Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \qquad k > 0.$$

Здесь точки обозначают производные по времени t. Этим уравнением описываются свободные (без сопротивления среды) колебания груза, подвешенного на пружине, автомобиля на рессорах и др.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \pm ik.$$

Общее решение

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Считая $C_1^2+C_2^2\neq 0$ (этим исключается тривиальное решение), вынесем за скобки $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$:

$$y=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos kt+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin kt\right).$$

Каждая из дробей в скобках не больше единицы по абсолютной величине, а сумма их квадратов равна единице. Поэтому найдется такой угол δ, что

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\delta,\quad \text{а}\ \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\delta.$$

Обозначим $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$. Тогда получим следующий вид общего решения

$$y=A\sin(kt+\delta). \tag{24}$$

$$y = A\sin(kt + \delta).$$

A и δ здесь — произвольные постоянные, определяются начальными условиями: начальными отклонением и скоростью

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = v_0.$$

Число A называют **амплитудой** колебаний, δ – **начальной фазой** колебаний, k – **частотой** колебаний (частота колебаний одинакова для всех начальных условий, определяется лишь свойствами системы – массой тела и жесткостью пружины), $T = \frac{2\pi}{k}$ – **периодом** колебаний. $\triangle$

Пример. Уравнение гармонических колебаний с вынуждающей периодической силой.

$$\ddot{y} + k^2 y = H \sin \omega t.$$

Это линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с квазимногочленом в правой части.

Общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \delta),$$

где A и δ — новые произвольные постоянные.

Найдем частное решение неоднородного уравнения. В нашем случае $\gamma = \omega i$. Вид частного решения зависит от того, является ли γ корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + k^2 = 0$. Рассмотрим случаи:

1). $\omega \neq k$, тогда γ — не корень характеристического уравнения, и

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$

Тогда

$$\dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = -\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t, \quad \ddot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t,$$

подставляя в исходное уравнение, приходим к соотношению

$$a(k^2 - \omega^2)\cos\omega t + b(k^2 - \omega^2)\sin\omega t = H\sin\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получаем:

$$\begin{cases} a(k^2 - \omega^2) = 0, \\ b(k^2 - \omega^2) = H. \end{cases}$$

Отсюда $a = 0$, $b = \frac{H}{k^2 - \omega^2}$, $y_{\text{ч.н.}}(t) = \frac{H}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = A\sin(kt+\delta) + \frac{H}{k^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Вывод: в случае, когда собственная частота k и вынуждающая частота ω различны, имеем наложение двух колебаний с постоянными амплитудами.

2). $\omega = k$,

тогда γ — однократный корень характеристического уравнения, и

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = t(a\cos\omega t + b\sin\omega t).$$

Тогда

$$\dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = t(-\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t) + a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

$$\ddot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = t(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) + 2(-\omega\, a\sin\omega t + \omega\, b\cos\omega t).$$

Подставляя в исходное уравнение и учитывая, что $\omega = k$, получим

$$2(-\omega\, a \sin\omega t + \omega\, b \cos\omega t) = H \sin\omega t.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных слагаемых, получаем:

$$b = 0, \qquad a = -\frac{H}{2\omega}.$$

Тогда $y_{\text{ч.н.}}(t) = -t\,\frac{H}{2\omega}\cos\omega t$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = A\sin(kt + \delta) - t\,\frac{H}{2\omega}\cos kt.$$

Вывод: в случае, когда собственная частота k и вынуждающая частота ω совпадают, амплитуда второго колебания неограниченно растет с ростом t даже при малом H. Такое явление резкого возрастания амплитуды под действием внешних возмущающих сил (даже совсем малых) называется **резонансом**. △

Если же неоднородность не является квазимногочленом (или суммой квазимногочленов), то можно применять метод вариации постоянных.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Соответствующее однородное уравнение $\qquad y'' - y = 0.$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$, его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,

Общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть уравнения не является квазимногочленом, поэтому применим метод вариации произвольных постоянных. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}.$$

Выпишем систему для нахождения производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x+1}; \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2(e^x+1)}, \\ C_2' = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}; \end{cases}$$

Далее интегрируем

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(e^x+1) + D_1, \\ C_2 = -\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(e^x+1) + D_2. \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в формулу для общего решения, получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$y = D_1 e^x + D_2 e^{-x} +$$

$$+ \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) \right) e^x + \left(-\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) \right) e^{-x}. \qquad \triangle$$

§15. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Оператор дифференцирования L(p). Характеристическое уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + ... + a_{n-1} z' + a_n z = f(t)$$

$a_1, \ a_2, \ ..., a_n$- постоянные числа, действительные или комплексные, функция $f(t)$ действительного аргумента t определена на интервале (r_1, r_2) и может быть комплекснозначной.

Примем обозначения из операционного исчисления:
p– оператор дифференцирования, т.е. $p = \frac{d}{dt}$, производная $\frac{dz}{dt}$ обозначается как pz. Для производной m-го порядка применяется обозначение $\frac{d^m}{dt^m}z = p^m z$.

Операторным многочленом называют выражение

$$L(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где $a_1,\ a_2,\ ..., a_n$- постоянные числа, действительные или комплексные.

В соответствии с правилами дифференцирования имеем

$$L(p)z = (a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)z = a_0z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \ldots + a_nz.$$

Свойства операторных многочленов:

1. $L(p)(z_1 + z_2) = L(p)z_1 + L(p)z_2$
2. $[L(p) + M(p)]z = L(p)z + M(p)z$
3. $L(p)[M(p)z] = [L(p)M(p)]z$
4. $L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$

Докажем, например, последнее.

$$L(p)z = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)e^{\lambda t} =$$

$$= a_0(e^{\lambda t})^{(n)} + a_1(e^{\lambda t})^{(n-1)} + \ldots + a_n(e^{\lambda t}) =$$

$$= (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n)e^{\lambda t}$$

Уравнение

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)z' + a_n(t)z = 0$$

можно записать в виде

$$L(p)z = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является линейным однородным. Оно имеет тривиальное решение $z \equiv 0$. Коэффициенты многочлена

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$$

будем в дальнейшем считать действительными. Условия теоремы Коши выполнены во всём пространстве:

$$-\infty < t < \infty, \ \ -\infty < z < \infty,$$

$$-\infty < z' < \infty, \ \ \ldots, \ \ -\infty < z^{(n-1)} < \infty.$$

Решение уравнения (1) можно искать среди функций $z = e^{\lambda t}$. Подставим в уравнение (1) эту функцию и получим:

$$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t} = 0.$$

Т. к. показательная функция в ноль не обращается, делаем вывод, что функция $z = e^{\lambda t}$ может удовлетворять уравнению (1) тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения $L(\lambda) = 0$. Уравнение

$$L(\lambda) = 0$$

или

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

называется **характеристическим**.

Линейные однородные уравнения

1). Случай простых корней характеристического уравнения.

Теорема. Пусть характеристическое уравнение $L(\lambda) = 0$ для дифференциального уравнения (1)

$$L(p)z = 0$$

имеет ровно n различных корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ среди которых нет кратных, тогда ФСР для этого дифференциального уравнения

$$z_1 = e^{\lambda_1 t},\ z_2 = e^{\lambda_2 t}, \ldots,\ z_n = e^{\lambda_n t}, \tag{2}$$

соответственно общее решение

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n\ -\ const.$

Доказательство. Каждая из функций (2) удовлетворяет уравнению (1) (отмечалось выше), поэтому надо доказать, что система (2) линейно независима. Для этого достаточно установить, что определитель Вронского $W(t)$ системы (2) отличен от нуля, например при $t = 0$. Докажем от противного. Предположим, что $W(0)$ системы (2) равен нулю:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} z_1(0) & \dots & z_S(0) & \dots & z_n(0) \\ z_1'(0) & \dots & z_S'(0) & \dots & z_n'(0) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ z_1^{(n-1)}(0) & \dots & z_S^{(n-1)}(0) & \dots & z_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{|l} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{array}$$

Система строк построенной матрицы линейно зависима в силу критерия фундаментальности системы решений, значит найдутся такие коэффициенты $b_{n-1}, b_{n-2}, \ \ldots, \ b_0$ (не все равные нулю), что

$$b_0 z_S^{(n-1)}(0) + b_1 z_S^{(n-2)}(0) + \ldots + b_{n-1} z_S(0) = 0. \tag{3}$$

Если ввести операторный многочлен

$$M(p) = b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1},$$

тогда равенство (3) запишется как

$$M(p) z_S(t) \left.\right|_{t=0} = 0.$$

Воспользуемся 4)свойством операторных многочленов:

$$M(p)z_S(t) = M(p)e^{\lambda_S t} = M(\lambda_S)e^{\lambda_S t}.$$

Далее получаем

$$M(p)z_S(t)\left.\right|_{t=0} = M(\lambda_S) = 0,$$

т.е. λ_S - корень многочлена $M(\lambda) \quad (s = 1,\ 2, \dots, n)$. Получаем, что $M(\lambda)$ имеет ровно n различных корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots, \lambda_n$, чего быть не может, т. к. $M(\lambda)$ степени $(n-1)$ и максимально может иметь $(n-1)$ различных корней. Наше предположение, что $W(0) = 0$, неверно, значит определитель Вронского не обращается в ноль на (r_1, r_2) (т. к. определитель Вронского либо равен нулю на (r_1, r_2), либо не обращается в ноль на (r_1, r_2)). В силу критерия фундаментальности системы решений, получаем, что система решений (2) уравнения (1) является ФСР.

Другой вариант доказательства:

Рассмотрим определитель Вронского $W(0)$, где вместо функции z и её производных поставим конкретные числа, соответствующие производным в при $t = 0$

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_S & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_S^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_S^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определитель (4) является определителем Ван-дер-Монда, а такой определитель не равен нулю, если все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различны.

У нас есть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ - попарно различные.

Теперь рассмотрим 2 случая:

а). Все $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ - действительные, тогда по теореме об общем виде решений линейных однородных уравнений n-го порядка общее решение уравнения (1) ,

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$- действительные константы, $z(t)$ – действительнозначная.

б). Есть $\lambda_i,\ \ldots, \lambda_j$ - комплексные, надо найти ФСР из действительнозначных функций.

Пусть $L(\lambda) = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in C, \quad \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in R$ - корни многочлена. (Поскольку коэффициенты L действительные, то комплексных корней будет чётное число, если все корни попарно различны, т.к. для каждого комплексного корня есть комплексный сопряжённый корень).

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \;\; \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

- ФСР уравнения (1).

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = u + iv, \quad u = e^{\alpha}\cos\beta t, \; v = e^{\alpha}\sin\beta t$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha}(\cos\beta t - i\sin\beta t) = u - iv, \quad u = e^{\alpha}\cos\beta t, \; v = e^{\alpha}\sin\beta t$$

Функции u и v – действительнозначные, по следствию 3 из теоремы о принципе суперпозиции, получаем, что u и v – решения уравнения (1) $L(p)z = 0$. Теперь проверяем, не нарушилась ли линейная независимость системы, если вместо $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$ написать $e^{\alpha}\cos\beta t, \quad e^{\alpha}\sin\beta t$.

Дана система решений

$$\{e^{\alpha}\cos\beta t,\ e^{\alpha}\sin\beta t,\ z_3, \ldots, z_n\}, \tag{5}$$

показать что она линейно независима. Докажем от противного.

Допустим, что система решений (5) линейно зависима. Значит

$$\exists\ C_1, C_2,\ \ldots,\ C_n : C_1^2 + C_2^2 +\ \ldots + C_n^2 \neq 0,$$

$$u = e^{\alpha}\cos\beta t, \quad v = e^{\alpha}\sin\beta t$$

$$C_1 u + C_2 v\ +\ C_3 z_3\ + \ldots + C_n z_n = 0$$

Введём новые обозначения

$$D_1 = \frac{C_1 - iC_2}{2},\ D_2 = \frac{C_1 + iC_2}{2},\ D_3 = C_3,\ \ldots,\ D_n = C_n.$$

В силу соотношений

$$D_1\ =\ D_2\ = 0 \Leftrightarrow\ C_1\ =\ C_2\ = 0.$$

$$
\begin{aligned}
&D_1(u+iv)+D_2(u-iv)\ +\ D_3z_3\ +\ldots+D_nz_n=\\
&=\tfrac{C_1-iC_2}{2}(u+iv)+\tfrac{C_1+iC_2}{2}(u-iv)\ +\ C_3z_3\ +\ldots+C_nz_n=\\
&=\tfrac{C_1u}{2}-\tfrac{C_2iu}{2}+\tfrac{C_1iv}{2}+\tfrac{C_2v}{2}+\tfrac{C_1u}{2}+\tfrac{C_2iu}{2}-\tfrac{C_1iv}{2}+\tfrac{C_2v}{2}+\\
&+C_3z_3\ +\ldots+C_nz_n=\\
&=C_1u+C_2v\ +\ C_3z_3\ +\ldots+C_nz_n=0
\end{aligned}
$$

Получили, что

$$\exists\ D_1, D_2,\ \ldots,\ D_n:\ D_1^2 + D_2^2 +\ \ldots +\ D_n^2 \neq 0,$$

$$D_1(u+iv) + D_2(u-iv)\ +\ D_3 z_3\ + \ldots + D_n z_n = 0.$$

Т. е. система решений

$$\{(u+iv),\ (u-iv)\ , z_3, \ldots, z_n\} = \{e^{(\alpha+i\beta)t},\ e^{(\alpha-i\beta)t}\ , e^{\lambda_3 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$$

линейно зависима, получили противоречие с тем, что данная система решений является линейно независимой
(т. к. $\{e^{(\alpha+i\beta)t},\ e^{(\alpha-i\beta)t}\ , e^{\lambda_3 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$ - ФСР уравнения (1)).

Если комплексных решений более 2-х, надо постепенно менять их на действительные (по 2). В результате мы получим ФСР уравнения (1) из действительнозначных функций.

Теорема доказана.

2). Случай кратных корней характеристического уравнения.

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные и попарно различны всего m $(m < n)$, то решений вида $e^{\lambda_i t}(i = \overline{1, m})$ не хватит для получения фундаментальной системы. Недостаток решений, связанный с наличием корня λ кратности k, можно восполнить функциями вида

$$te^{\lambda t},\ t^2e^{\lambda t}\ , \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t},$$

число которых равно количеству потерянных решений вида $e^{\lambda t}$, обусловленных кратностью корня λ.

Лемма 1. Справедлива следующая формула смещения:

$$L(p)[e^{\lambda t} f(t)] = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).$$

Здесь $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$ – произвольный многочлен,

λ — комплексное число,

$f(t)$ — любая, достаточное число раз дифференцируемая функция.

Доказательство (по индукции).

<u>База индукции:</u> $(n = 1)$

$$L(p) = a_0 p + a_1,$$

$$\begin{aligned} L(p)[e^{\lambda t} f(t)] &= (a_0 p + a_1)[e^{\lambda t} f(t)] = a_0 p[e^{\lambda t} f(t)] + a_1 e^{\lambda t} f(t) = \\ &= a_0 (e^{\lambda t} p[f(t)] + \lambda e^{\lambda t} f(t)) + a_1 e^{\lambda t} f(t) = \\ &= e^{\lambda t} (a_0 (p + \lambda) + a_1) f(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t) \end{aligned}$$

Далее предполагаем, что формула смещения верна для операторных многочленов, степень которых не превосходит $(n-1)$, $n > 1$.

Шаг индукции: Покажем, что функция смещения будет верна для операторных многочленов степени n. Пусть $L(p)$ имеет степень n, тогда существуют $L_1(p)$ и $L_2(p)$, такие что их степени меньше n и

$$L(p) = L_1(p) \cdot L_2(p).$$

Для $L_1(p)$ и $L_2(p)$ можно применить предположение индукции и пользуемся 3-им свойством операторных многочленов:

$$L(p)[e^{\lambda t} f(t)] = (L_1(p) \cdot L_2(p))[e^{\lambda t} f(t)] =$$
$$= L_1(p)[L_2(p)[e^{\lambda t} f(t)]] = L_1(p)[e^{\lambda t} L_2(p+\lambda) f(t)] =$$
$$= e^{\lambda t} L_1(p+\lambda)[L_2(p+\lambda) f(t)] = e^{\lambda t}[L_1(p+\lambda) L_2(p+\lambda)] f(t) =$$
$$= e^{\lambda t} L(p+\lambda) f(t)$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2.

Пусть $L(p)$ - произвольный операторный многочлен, λ - комплексное число, $r \geq 0$ - целое число, $\omega_r(t)$ - функция действительной переменной t, определяемая формулой

$$\omega_r(t) = L(p)[e^{\lambda t} t^r].$$

Справедливы следующие утверждения:

1). Если λ — корень многочлена $L(p)$ кратности k, то $\omega_r(t) \overset{t}{\equiv} 0$ при $r = 1,\, 2,\, \ldots,\, k-1$.

2). Если функции $\omega_1(t), \omega_2(t),\ \ldots,\ \omega_{k-1}(t)$ равны нулю хотя бы для одного значения $t = t_0$, то λ - корень многочлена $L(p)$, имеющий кратность не менее, чем k.

Доказательство.

Докажем Утверждение 1).

Пусть λ - корень многочлена $L(p)$ кратности k, поэтому справедливо представление

$$L(p) = M(p)(p - \lambda)^k,$$

где $M(p)$ – многочлен. Заменим в этом тождестве p на $p + \lambda$:

$$L(p + \lambda) = M(p + \lambda)p^k,$$

тогда, с учетом формулы смещения, получаем

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t} M(p + \lambda)p^k t^r \equiv 0$$

при $r < k$, так как при $r < k$ имеем $p^k t^r \equiv 0$.

Утверждение 1) доказано.

Докажем Утверждение 2).

Пусть

$$\omega_1(t_0) = \omega_2(t_0) = \ldots = \omega_{k-1}(t_0) = 0.$$

По формуле смещения получаем

$$\omega_r(t) = L(p)[e^{\lambda t} t^r] = e^{\lambda t} L(p+\lambda) t^r.$$

Многочлен $L(p+\lambda)$ разложим по степеням p:

$$L(p+\lambda) = b_0 + b_1 p + \ldots + b_n p^n.$$

База индукции. $(r = 0)$

$$\omega_0(t) = e^{\lambda t} L(p+\lambda)1, \quad L(p+\lambda)1 = (b_0 + b_1 p + \ldots + b_n p^n)1 \equiv b_0 1,$$

так как

$$p1 = p^2 1 = \ldots = p^n 1 = 0.$$

Поэтому

$$0 = \omega_0(t_0) = e^{\lambda t_0} b_0 \Rightarrow \; b_0 = 0.$$

Предположение индукции. $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0$

Шаг индукции: Докажем, что $b_s = 0$ $(s \leq k-1)$.

Многочлен $L(p+\lambda)$ имеет вид

$$L(p+\lambda) = b_s p^s + b_{s+1} p^{s+1} + \ldots + b_n p^n.$$

Имеем

$$\omega_s(t) = e^{\lambda t} L(p+\lambda) t^s = e^{\lambda t} b_s s!,$$

так как

$$p^s t^s = s!,\ p^{s+1} t^s = \ldots = p^n t^s = 0.$$

При $t = t_0$ получаем

$$0 = \omega_s(t_0) = e^{\lambda t_0} b_s s! \;\Rightarrow\; b_s = 0.$$

Имеем $b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-1} = 0$. Следовательно,

$$L(p+\lambda) = b_k p^k + b_{k+1} p^{k+1} + \ldots + b_n p^n = (b_k + b_{k+1} p + \ldots + b_n p^{n-k}) p^k.$$

Запишем $L(p+\lambda)$ в виде $L(p+\lambda) = M(p)p^k$. В этом тождестве заменим p на $p - \lambda$:

$$L(p) = M(p-\lambda)(p-\lambda)^k.$$

Из последней формулы видно, что λ, как корень многочлена $L(p)$, имеет кратность не менее, чем k.

Утверждение 2) доказано.

Лемма 2 доказана.

Теорема. Пусть

$$L(p)z = 0 \tag{6}$$

линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, а $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_m\ (m \leq n)$ - все попарно различные корни характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ и корень λ_S имеет кратность $k_S\ (s = \overline{1, m})$, так что $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Обозначим

$$
\left.
\begin{array}{llll}
z_1 = e^{\lambda_1 t}, & z_2 = te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & z_{k_1} = t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \\
z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, & z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, & \ldots, & z_{k_1+k_2} = t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
 & & & z_n = t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}
\end{array}
\right\}. \qquad (7)
$$

Тогда каждая из функций (7) является решением уравнения (6), а функция

$$
z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n,
$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные действительные или комплексные постоянные, является общим решением уравнения (6).

Доказательство. В силу леммы 2 каждая функция (7) является решением уравнения (6). Надо проверить линейную независимость системы решений (7).

Докажем от противного аналогично доказательству теоремы об общем решении линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.

Предположим, что определитель Вронского системы решений (7) в какой-то точке t_0 равен нулю.

$$\exists t_0 : \; W(t_0) = 0.$$

$$W(t_0) = \det \begin{pmatrix} z_1(t_0) & \dots & z_S(t_0) & \dots & z_n(t_0) \\ z_1'(t_0) & \dots & z_S'(t_0) & \dots & z_n'(t_0) \\ \dots\dots\dots\dots & & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & & \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & z_S^{(n-1)}(t_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = 0 \qquad \left| \begin{matrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{matrix} \right.$$

Система строк построенной матрицы линейно зависима в силу критерия фундаментальности системы решений, значит найдутся такие коэффициенты $b_{n-1}, b_{n-2}, \ \ldots, \ b_0$ (не все равные нулю), что

$$b_0 z_S^{(n-1)}(t_0) + b_1 z_S^{(n-2)}(t_0) + \ldots + b_{n-1} z_S(t_0) = 0. \tag{8}$$

Введем

$$M(p) = b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1},$$

тогда равенство (8) запишем

$$M(p) z_S(t) \,|_{t=t_0} = 0 \tag{9}$$

Заменим $L(p)$ на $M(p)$ в формуле $\omega_r(t) = L(p) t^r e^{\lambda t}$, т. е. $\omega_r(t) = M(p) t^r e^{\lambda t}$.

Пусть вначале $\lambda = \lambda_1$, $s = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ k_1 - 1$. Формулу (9) можно переписать в виде

$$M(p)z_S(t)\,\big|_{t=t_0} = M(p)t^S e^{\lambda_1 t}\,\big|_{t=t_0} = \omega_S(t_0) = 0,$$

следовательно,

$$\omega_1(t_0) = \omega_2(t_0) = \ \ldots = \omega_{k-1}(t_0) = 0.$$

Во второй части леммы 2 число λ_1 - корень многочлена $M(p)$ кратности не менее, чем k_1. Аналогичным образом заключаем для остальных корней $\lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots, \lambda_m$ многочлена $L(p)$, что они также являются корнями многочлена $M(p)$ с кратностями не меньше, чем $k_2, k_3, \ldots, k_m$. Если считать корни многочлена $M(p)$ с их кратностями, то получается, что у него корней не меньше, чем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Этого не может быть, так как многочлен имеет степень всего лишь $(n-1)$.

Получаем

$$\forall t \in (r_1, r_2): \; W(t) \neq 0.$$

(т. к. определитель Вронского либо равен нулю на (r_1, r_2), либо не обращается в ноль на (r_1, r_2)). В силу критерия фундаментальности системы решений, получаем, что система решений (7) уравнения (6) является ФСР.

По теореме об общем виде решений линейных однородных уравнений n-го порядка общее решение уравнения (6)

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные действительные или комплексные постоянные.

Теорема доказана.

Уравнения Эйлера и Бесселя

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0, \tag{10}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - постоянные числа, и приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$ аргумента x на t. При рассмотрении уравнения (10) в области $x < 0$ делается замена $x = -e^t$.

Перейдём к производным от y по t, зная, что $t = \ln x$. Последовательно получаем равенства

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}.$$

Подставляем эти выражения производных в уравнение (10) и получаем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \tilde{a}_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \tilde{a}_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \ldots + \tilde{a}_n y = 0 \qquad (11)$$

Пусть λ - корень характеристического уравнения для дифференциального уравнения (11), а $y = \varphi(t)$ - соответствующее ему решение. Переходя к старой переменной, получим $y = \varphi(\ln x)$.

Метод нахождения решения неоднородного уравнения с правой частью вида $f(x)e^{\lambda x}$ можно применить к неоднородному уравнению Эйлера с правой частью $f(\ln x)x^{\lambda}$.

Описанный способ применим и к обобщённому уравнению Эйлера:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0.$$

Делается замена $ax+b=e^t$ или $ax+b=e^{-t}$.

В математической физике важную роль играет уравнение Бесселя:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай $n=\frac{1}{2}$, когда уравнение Бесселя к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Сделаем замену $y=zx^{-\frac{1}{2}}$, $y'=z'x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}zx^{-\frac{3}{2}}$, $y''=z''x^{-\frac{1}{2}}-zx^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}zx^{-\frac{5}{2}}$. Подставим в уравнение (12) при $n=\frac{1}{2}$, получим $z''x^{\frac{3}{2}}+zx^{\frac{3}{2}}=0$, $z''+z=0$ - уравнение с постоянными коэффициентами.

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлен в правой части. Рассмотрим уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + ... + a_{n-1} z' + a_n z = F(t). \tag{13}$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - постоянные действительные числа, $F(t)$ - функция, непрерывная на промежутке (r_1, r_2). Общее решение линейного неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного решения. Рассмотрим уравнение:

$$L(p)z = f(t)e^{\lambda t}. \tag{14}$$

Теорема.

Если в уравнении (14) $f(t)$ - многочлен степени r с комплексными коэффициентами, λ - комплексное число, то уравнение (14) имеет решение вида

$$z = t^k g(t) e^{\lambda t}, \tag{15}$$

где $g(t)$ - многочлен той же степени, что и $f(t)$, а $k = 0$, когда λ не является корнем характеристического уравнения (нерезонансный случай), или, когда λ - корень, k равно кратности этого корня (резонансный случай). Коэффициенты многочлена $g(t)$ могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов.

Доказательство.

Оно будет едино для $k \neq 0$ и $k = 0$. Далее покажем, что для неопределённых коэффициентов многочлена $g(t)$ получатся уравнения, решение которых существует и единственно. Вначале произведём некоторые преобразования.

Кратность корня λ в точности равна k, поэтому $L(p) = M(p)(p-\lambda)^k$, причём $M(\lambda) \neq 0$. Заменим в этом тождестве p на $p+\lambda$:

$$L(p+\lambda) = M(p+\lambda)p^k.$$

$M(p+\lambda)$ можно представить в виде $M(p+\lambda) = pM^*(p) + M(\lambda)$ ($M(0+\lambda) = M(\lambda)$ - свободный член и вынесем общий множитель p). Подставив (15) в уравнение (14), получим:

$$L(p)t^k g(t)e^{\lambda t} = f(t)e^{\lambda t},$$

$$e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^k g(t) = f(t)e^{\lambda t}$$

$$L(p+\lambda)t^k g(t) = f(t) \tag{16}$$

Представим многочлены $f(t)$ и $g(t)$ в виде:

$$f(t) = a_0 t^r + f^*(t), \qquad g(t) = b_0 t^r + g^*(t).$$

(степень многочленов $f^*(t)$ и $g^*(t)$ не выше $r-1$). Левую часть равенства (16) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} &L(p+\lambda)t^k g(t) = L(p+\lambda)t^k[b_0 t^r + g^*(t)] = \\ &L(p+\lambda)t^k g^*(t) + M(p+\lambda)p^k t^k b_0 t^r = \\ &= L(p+\lambda)t^k g^*(t) + [pM(p) + M^*(\lambda)]p^k b_0 t^{r+k} \end{aligned}$$

Равенство (16) примет вид:

$$L(p+\lambda)t^k g^*(t) + b_0 M^*(p)p^{k+1}t^{r+k} + M(\lambda)p^k b_0 t^{r+k} = a_0 t^r + f^*(t).$$

Правая и левая части являются многочленами относительно переменной t.

Укажем степень каждого из трёх слагаемых левой части.

- Степень первого не выше степени многочлена $M(p+\lambda)p^k t^k g^*(t)$, т. е. $(r-1)$, т. к. многочлен $t^k g^*(t)$ имеет степень $k+r-1$, а дифференцируется он k раз.
- Степень второго не выше $(r-1)$, т. к. t^{k+r} дифференцируется $k+1$ раз.
- Степень третьего равна r. Приравнивая слагаемые степени r, мы получаем уравнение

$$M(\lambda)p^k b_0 t^{r+k} = a_0 t^r,$$

из которого вычисляется b_0. Вспомним, что $M(\lambda) \neq 0$.

Уничтожив члены степени r, придём к уравнению

$$L(p+\lambda)t^k g^*(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p)p^{k+1}t^{r+k}, \tag{17}$$

в котором правая часть – известный многочлен степени не выше $r-1$. Эту же степень припишем искомому многочлену $g^*(t)$. Уравнение (17) имеет такой же вид, как и уравнение (14), только степени многочленов стали меньше. Следовательно:

1. По доказанному однозначно находится коэффициент при старшей степени t многочлена $g^*(t)$.
2. Найдя этот коэффициент, приходим к уравнению вида (16).

Так, вычисляя один за другим коэффициенты многочлена $g^*(t)$, мы дойдём наконец до свободного члена.

На практике записывают частное решение в виде $z = t^k g(t) e^{\lambda t}$ и подставляют в уравнение. Для неопределённых коэффициентов многочлена $g(t)$ получается система линейных алгебраических уравнений с треугольной невырожденной матрицей. Из первого уравнения находится b_0, из второго – b_1 и т. д.

Теорема доказана.

Замечание 1.

Используя принцип суперпозиции, можно находить частные решения для уравнения с правой частью вида

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t) e^{\lambda_i t},$$

где $f_i(t)$ - многочлены. Такие функции $F(t)$ называют **квазимногочленами**.

Замечание 2.

Если правая часть имеет вид $f(t)$, т. е. $f(t)e^{0t}$, то роль λ играет число 0. Смотрим, является ли λ корнем уравнения $L(\lambda) = 0$ и какой кратности.

Замечание 3.

Если коэффициенты многочленов $L(p)$, $f(t)$ и число λ - действительны, то коэффициенты многочлена $g(t)$ также будут действительными.

Замечание 4.

Наиболее общим является уравнение (14) вида

$$L(p)z = e^{\alpha t}[P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t]. \tag{18}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты многочленов $L(p)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ и числа α и β действительны. Заменяя $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$ по формулам Эйлера через экспоненты, получим

$$e^{\alpha t}[P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t] =$$

$$\frac{1}{2}[P_1(t) - iP_2(t)]e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}[P_1(t) + iP_2(t)]e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (19)$$

При решении уравнения

$$L(p)z = \frac{1}{2}[P_1(t) - iP_2(t)]e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (20)$$

роль числа λ в теореме играет $\alpha + i\beta$. Поэтому выясняем, является ли число $\alpha + i\beta$ корнем уравнения $L(\lambda) = 0$ и если да, то какова его кратность k. Затем ищем решение

$$z = t^k g_1(t)e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Полученному многочлену $g_1(t)$ всегда можно придать вид

$$g_1(t) = \frac{1}{2}[Q_1(t) - iQ_2(t)],$$

где $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ многочлены с действительными коэффициентами, а их степень равна наибольшей из степеней многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

С уравнением

$$L(p)z = \frac{1}{2}[P_1(t) + iP_2(t)]e^{(\alpha - i\beta)t} \tag{21}$$

проделываем то же самое. Правые части уравнений (20) и (21) комплексно сопряжены, поэтому для многочлена $g_2(t)$ получим

$$z = t^k g_2(t) e^{(\alpha - i\beta)t} = \frac{1}{2} t^k [Q_1(t) + iQ_2(t)] e^{(\alpha - i\beta)t}.$$

Частным решением уравнения (18) будет функция

$$z = \frac{1}{2}t^k[Q_1(t) - iQ_2(t)]e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{1}{2}t^k[Q_1(t) + iQ_2(t)]e^{(\alpha-i\beta)t}. \qquad (22)$$

Преобразование (19) назовём прямым. Делая с (22) обратное преобразование, получим

$$z = t^k e^{\alpha t}[Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t]. \qquad (23)$$

Именно в таком виде следует искать частное решение уравнение (18), помня, что k - это кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$, а степень многочленов $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ с неопределёнными коэффициентами равна наибольшей из степеней многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Системы линейных дифференциальных уравнений

Линейная система дифференциальных уравнений n-го порядка выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dotfill \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

где искомые функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

В сокращённом виде систему линейных дифференциальных уравнений записывают так:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Введём обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}, \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

Тогда система линейных дифференциальных уравнений запишется как:

$$\dot{X} = A(t) \cdot X + F(t), \quad X \in R^n. \tag{24}$$

Можно воспринимать систему линейных дифференциальных уравнений как векторное дифференциальное уравнение.

Возьмём

$$t \in (r_1, r_2), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n.$$

Применим теорему Коши к системе (24), получим, что система (24) имеет всегда единственное решение на (r_1, r_2) при начальных условиях

$$X(t_0) = X^0,\ t_0 \in (r_1, r_2), \quad X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in R^n$$

.

Система линейных дифференциальных уравнений (24)

$\dot{X} = A(t)X + F(t), \quad X \in R^n$ - неоднородная система.

Если $F(t) \equiv 0$, то $\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$- однородная система.

Предложение. Пусть $X(t)$ – решение однородной системы и пусть при некотором значении $t = t_0$ $X(t_0) = 0$, тогда $X(t) \equiv 0$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Доказательство. Однородная система обладает тривиальным решением $X \equiv 0$. Это решение удовлетворяет начальным условиям $t = t_0$. В силу теоремы Коши о существовании и единственности решения эти решения совпадают.

Принцип суперпозиции

Если $X = X_s(t) \quad s = 1\,,2,\,\ldots,S$ являются решениями уравнений

$$\dot{X} = A(t)X + F_s(t), \quad X \in R^n,$$

то $X = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s X_s(t)$ - решение следующей системы

$$\dot{X} = A(t)X + \sum_{s=1}^{S} \alpha_s F_s(t), \quad X \in R^n.$$

Следствия

1. Линейная комбинация решений однородной системы также является решением этой системы.
2. Разность произвольных решений неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.
3. Вектор-функция $X = U(t) + iV(t)$, где $U(t)$,$V(t)$ – действительные вектор-функции, является решением системы

$$\dot{X} = A(t)X + F_1(t) + iF_2(t), \quad X \in R^n,$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$ – также действительные вектор-функции,

$$\Updownarrow$$

$X = U(t)$ - решение $\dot{X} = A(t)X + F_1(t), \quad X \in R^n$ и

$X = V(t)$ - решение $\dot{X} = A(t)X + F_2(t), \quad X \in R^n$.

Все следствия проверяются подстановкой. Введём вспомогательные обозначения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = \{X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$$

Матрица $Y(t)$ состоит из столбцов

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$$

.

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X \in R^n,$$

и пусть $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ - решения этой системы. Имеем представление

$$\dot{x}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_{jk}, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n, \quad k = 1,\ 2, \ldots, n,$$

что можно записать в матричной форме

$$\dot{Y} = A(t)Y, \tag{25}$$

так $Y = \{X_1,\ X_2, \ldots, X_n\}$ - решение матричного уравнения (25).

Определение. Вектор-функции $X_1(t),\ X_2(t), \dots, X_n(t)$ линейно зависимы при $t \in (r_1, r_2)$, если

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n : \quad \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t) = 0.$$

Если из

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i = 0 \Rightarrow \forall i = 1,\ 2,\ \dots,\ n \quad C_i = 0,$$

тогда вектор-функции $X_1(t),\ X_2(t), \dots, X_n(t)$ линейно независимы.

Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$Y(t)C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t).$$

Определителем Вронского системы вектор-функций

$$X_1(t) \in R^n,\ X_2(t) \in R^n, \ldots, X_n(t) \in R^n$$

называют $W(t) = \det Y(t)$.

Теорема.

1). Если n-мерные вектор-функции $X_1(t),\ \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ линейно зависимы при $t \in (r_1, r_2)$, то определитель Вронского этой системы нулевой, т.е. $W(t) = 0 \quad t \in (r_1, r_2)$.

2). Если же функции $X_1(t),\ \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ - решения однородной системы $\dot{X} = A(t)X, \quad X \in R^n$ и линейно независимы,
то $W(t) \neq 0 \quad t \in (r_1, r_2)$.

Доказательство.

Утверждение 1.

Функции $X_1(t), \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ - линейно зависимы. Тогда $\forall t \in (r_1, r_2)$ $\exists C = (C_1, C_2, \ldots, C_n) : \quad \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0 \quad Y(t)C = 0$. Посмотрим на равенство $Y(t)C = 0$ как на линейную однородную систему уравнений относительно вектора C. Так как C – ненулевой вектор, то наряду с решением системы $X_1(t), \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$, существует тривиальное решение $X_i \equiv 0 \quad i = \overline{1, n}$. По теореме из курса алгебры $\det Y(t) = 0$. Получаем, что $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) = \det Y(t) = 0$.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2.

Докажем от противного. Предположим, что $\exists t_0 \in (r_1, r_2) \quad W(t_0) = 0$. Так как у линейной однородной системы уравнений $Y(t_0)C = 0$, у этой системы нулевой главный определитель, т. е. $W(t_0) = \det Y(t_0) = 0$, тогда $\exists \bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n) \neq 0$ - нетривиальное решение, получаем $Y(t_0)\bar{C} = 0$.

Так как линейная комбинация решений – тоже решение, т. е.

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$$

-система решений системы $\dot{X} = A(t)X$ (или решение уравнения $Y(t)C = 0$), значит $X(t) = Y(t)\bar{C} = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i X_i$ - решение $\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$.

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(t_0) = Y(t_0)\bar{C} \end{cases}$$

Здесь $t_0 \in (r_1, r_2)$ $X(t_0) = Y(t_0)\bar{C}$ - начальное условие задачи Коши. Но и тривиальное решение $X \equiv 0$ удовлетворяет условию $X(t_0) = 0$.

В силу однозначности решения задачи Коши $t \in (r_1, r_2)$ $X(t) = Y(t)\bar{C} \equiv 0$, то есть $\sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i X_i \equiv 0$, отсюда $X_1(t),\ X_2(t), \dots, X_n(t)$ - линейно зависимы, получили противоречие с линейной независимостью $X_1(t),\ X_2(t), \dots, X_n(t)$. Утверждение 2 доказано.

§16. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Линейная система ДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

где искомые функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

В сокращённом виде систему записывают так:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Введём обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}, \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

Тогда система линейных дифференциальных уравнений запишется:

$$\dot{X} = A(t)X + F(t), \quad X \in R^n. \tag{1}$$

Можно воспринимать систему линейных ДУ как векторное дифференциальное уравнение.

Возьмём

$$t \in (r_1, r_2), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n.$$

Применим теорему Коши к системе (1), получим, что система (1) имеет всегда единственное решение на (r_1, r_2) при начальных условиях

$$X(t_0) = X^0,\ t_0 \in (r_1, r_2), \quad X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in R^n$$

.

Система линейных дифференциальных уравнений (1)

$\dot{X} = A(t)X + F(t), \quad X \in R^n$ - неоднородная система.

Если $F(t) \equiv 0$, то $\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$- однородная система.

Предложение. Пусть $X(t)$ – решение однородной системы и пусть при некотором значении $t = t_0$ $X(t_0) = 0$, тогда $X(t) \equiv 0$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Доказательство. Однородная система обладает тривиальным решением $X \equiv 0$. Это решение удовлетворяет начальным условиям $t = t_0$. В силу теоремы Коши о существовании и единственности решения эти решения совпадают.

Принцип суперпозиции

Если $X = X_s(t) \quad s = 1\,, 2, \ldots, S$ являются решениями уравнений

$$\dot{X} = A(t)X + F_s(t), \quad X \in R^n,$$

то $X = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s X_s(t)$ - решение следующей системы

$$\dot{X} = A(t)X + \sum_{s=1}^{S} \alpha_s F_s(t), \quad X \in R^n.$$

Следствия

1. Линейная комбинация решений однородной системы также является решением этой системы.
2. Разность произвольных решений неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.
3. Вектор-функция $X = U(t) + iV(t)$, где $U(t)$,$V(t)$ – действительные вектор-функции, является решением системы

$$\dot{X} = A(t)X + F_1(t) + iF_2(t), \quad X \in R^n,$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$ – также действительные вектор-функции,

$$\Updownarrow$$

$X = U(t)$ - решение $\dot{X} = A(t)X + F_1(t), \quad X \in R^n$ и

$X = V(t)$ - решение $\dot{X} = A(t)X + F_2(t), \quad X \in R^n$.

Все следствия проверяются подстановкой. Введём вспомогательные обозначения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = \{X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$$

Матрица $Y(t)$ состоит из столбцов

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$$

.

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X \in R^n,$$

и пусть $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ - решения этой системы. Имеем представление

$$\dot{x}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_{jk}, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n, \quad k = 1,\ 2, \ldots, n,$$

что можно записать в матричной форме

$$\dot{Y} = A(t)Y, \tag{2}$$

так $Y = \{X_1,\ X_2, \ldots, X_n\}$ - решение матричного уравнения (2).

Определение. Вектор-функции $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ линейно зависимы при $t \in (r_1, r_2)$, если

$$\exists C_1, C_2, \ldots, C_n : \quad \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t) = 0.$$

Если из

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i = 0 \Rightarrow \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \quad C_i = 0,$$

тогда вектор-функции $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ линейно независимы.

Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$

тогда

$$Y(t)C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t).$$

Определителем Вронского системы вектор-функций

$$X_1(t) \in R^n,\ X_2(t) \in R^n, \ldots, X_n(t) \in R^n$$

называют $W(t) = \det Y(t)$.

Теорема.

1). Если n-мерные вектор-функции $X_1(t),\ \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ линейно зависимы при $t \in (r_1, r_2)$, то определитель Вронского этой системы нулевой, т.е. $W(t) = 0 \quad t \in (r_1, r_2)$.

2). Если же функции $X_1(t),\ \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ - решения однородной системы $\dot{X} = A(t)X, \quad X \in R^n$ и линейно независимы, то $W(t) \neq 0 \quad t \in (r_1, r_2)$.

Доказательство.

Утверждение 1.

Функции $X_1(t),\ \ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ - линейно зависимы. Тогда $\forall t \in (r_1, r_2)\ \exists C = (C_1, C_2, \ldots, C_n):\quad \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0 \quad Y(t)C = 0$. Посмотрим на равенство $Y(t)C = 0$ как на линейную однородную систему уравнений относительно вектора C. Так как C – ненулевой вектор, то наряду с решением системы $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$, существует тривиальное решение $X_i \equiv 0 \quad i = \overline{1, n}$. По теореме из курса алгебры $\det Y(t) = 0$. Получаем, что $\forall t \in (r_1, r_2) \quad W(t) = \det Y(t) = 0$.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2.

Доказем от противного. Предположим, что $\exists t_0 \in (r_1, r_2) \quad W(t_0) = 0$. Так как у линейной однородной системы уравнений $Y(t_0)C = 0$, у этой системы нулевой главный определитель, т. е. $W(t_0) = \det Y(t_0) = 0$, тогда $\exists \bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n) \neq 0$ - нетривиальное решение, получаем $Y(t_0)\bar{C} = 0$.

Так как линейная комбинация решений – тоже решение, т. е.

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$$

-система решений системы $\dot{X} = A(t)X$ (или решение уравнения $Y(t)C = 0$), значит $X(t) = Y(t)\bar{C} = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i X_i$ - решение $\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$.

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(t_0) = Y(t_0)\bar{C} \end{cases}$$

Здесь $t_0 \in (r_1, r_2)$ $X(t_0) = Y(t_0)\bar{C}$ - начальное условие задачи Коши. Но и тривиальное решение $X \equiv 0$ удовлетворяет условию $X(t_0) = 0$. В силу однозначности решения задачи Коши $t \in (r_1, r_2)$ $X(t) = Y(t)\bar{C} \equiv 0$, то есть $\sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i X_i \equiv 0$, отсюда $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ - линейно зависимы, получили противоречие с линейной независимостью $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$. Утверждение 2 доказано.

Определение: Фундаментальной системой решений однородной системы уравнений n-го порядка

$$\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$$

называют набор из n линейно независимых решений этой системы

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t).$$

Матрицу $Y(t) = \{X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$ называют фундаментальной матрицей, если

$$Y(t_0) = E,$$

$Y(t)$ называют нормальной фундаментальной матрицей. Здесь E– матрица тождественного преобразования.

Из выше доказанной теоремы получаем

Критерий фундаментальности системы решений (матрицы $Y(t)$)

Система решений $X_1(t),\ X_2(t), \ldots, X_n(t)$ фундаментальна $\Leftrightarrow \exists t_0 \in (r_1, r_2) \quad W(t_0) \neq 0.$

Теорема об общем виде решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений.

1). Любая система $\dot{X} = A(t) \cdot X, \quad X \in R^n$ имеет ФСР.

2). Если $Y(t)$ – фундаментальная матрица векторного уравнения $\dot{X} = A(t) \cdot X$, то всякое решение этого векторного уравнения представимо в виде $X(t) = Y(t) \cdot C$, где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$- вектор произвольных постоянных.

Доказательство:

1). Возьмём Y^0 – постоянная матрица, $\det Y^0 \neq 0$. Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{Y} = A(t)Y$$
$$Y(t_0) = Y^0 \quad ,$$

где $t_0 \in (r_1, r_2)$. Столбцы $Y(t)$ есть

$$X_1(t) \in R^n,\ X_2(t) \in R^n, \ldots, X_n(t) \in R^n$$

– решения соответствующей системы $\dot{X} = A(t)X$.

В силу единственности решения задачи Коши $Y(t)$ найдется единственным образом.

Определитель Вронского системы вектор-функций

$$X_1(t) \in R^n,\ X_2(t) \in R^n, \ldots, X_n(t) \in R^n$$

есть

$$W(t) = \det Y(t), \quad W(t_0) = \det Y(t_0) = \det Y^0 \neq 0.$$

По критерию фундаментальности $Y(t)$ – фундаментальная матрица. В силу того, что матрицу Y^0, $\det Y^0 \neq 0$ можно выбирать бесконечно многими способами, то существует бесконечное число фундаментальных матриц, соответствующих данному векторному уравнению $\dot{Y} = A(t) \cdot Y$ иначе, существует бесконечно много ФСР

$$X_1(t) \in R^n,\ X_2(t) \in R^n, \ldots, X_n(t) \in R^n$$

для системы $\dot{X} = A(t)X$.

2). Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{X} = A(t) \cdot X$,
$X = \bar{X}(t)$ - какое-то решение этой системы,
возьмём какое-то

$$t_0 \in (r_1, r_2), \quad X^0 = \bar{X}(t_0).$$

Рассмотрим уравнение

$$Y(t_0) \cdot C = X^0,$$

($Y(t_0)$ – невырожденная матрица), далее получаем

$$C = Y^{-1}(t_0) X^0,$$

тогда

$$X(t) = Y(t) \cdot C = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) X^0,$$

$$X(t_0) = Y(t_0) \cdot C = Y(t_0) \cdot Y^{-1}(t_0) X^0 = X^0,$$

получили $X^0 = X(t_0)$ (т. е. $X(t_0)$ удовлетворяет начальному условию задачи Коши).

В силу единственности решения задачи Коши $\bar{X}(t) \equiv X(t)$, отсюда

$$\bar{X}(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) X^0 = Y(t) \cdot C.$$

Обозначим $K(t, t_0) = Y(t) Y^{-1}(t_0)$, тогда любое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t) X \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

выглядит так:

$$X(t) = K(t, t_0) X^0.$$

Матрица $K(t, t_0)$ – импульсная матрица системы или матрица Коши;

$K(t, t_0)$ – фундаментальная и нормальная, однозначно определяется соотношениями

$$\begin{cases} \frac{dK(t,t_0)}{dt} = A(t)K(t, t_0) \\ K(t_0, t_0) = E \end{cases}$$

Здесь t_0– фиксированный параметр.

Теорема доказана.

Формула Лиувилля-Остроградского.

Пусть дана линейная система $\dot{X} = A(t)X$, $X \in R^n$, распишем её в виде

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \ldots + a_{in}(t)x_n \qquad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

столбцы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - решение уравнения, рассмотрим определитель Вронского для этих решений

$$W(t) = \begin{array}{c} \underline{X_1\ X_2\ \ldots\ X_n} \\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \quad \left| \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right. \quad ,$$

т. е. за z_i обозначим векторы строки определителя

$$z_i = (x_{i1}\ x_{i2}\ \ldots\ x_{in})\ \ i = \overline{1, n}.$$

Подставим поочерёдно $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в уравнение (3).

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = a_{i1}(t)x_{11} + a_{i2}(t)x_{21} + \ldots + a_{in}(t)x_{n1} \\ \dot{x}_{i2} = a_{i1}(t)x_{12} + a_{i2}(t)x_{22} + \ldots + a_{in}(t)x_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{in} = a_{i1}(t)x_{1n} + a_{i2}(t)x_{2n} + \ldots + a_{in}(t)x_{nn} \end{cases} \tag{4}$$

Систему (4) запишем в векторной форме

$$\dot{z}_i = a_{i1}(t)z_1 + a_{i2}(t)z_2 + \ldots + a_{in}(t)z_n \qquad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Для вычисления производной определителя Вронского воспользуемся правилом

$$\dot{W}(t) = W_1 + W_2 + \ldots + W_n.$$

$$W_i = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ \dot{z}_i \\ \ldots \\ z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ a_{i1}(t)z_1 + a_{i2}(t)z_2 + \ldots + a_{in}(t)z_n \\ \ldots \\ z_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ a_{i1}(t)z_1 \\ \dots \\ z_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ a_{ii}(t)z_i \\ \dots \\ z_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ a_{in}(t)z_n \\ \dots \\ z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ a_{ii}(t)z_i \\ \dots \\ z_n \end{vmatrix}$$

$$W_i = a_{ii}(t)W(t)$$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) W(t)$$

или

$$\dot{W}(t) = S(t) W(t),$$

где $S(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ – след матрицы $A(t)$.

Решение уравнения $\dot{W}(t) = S(t)W(t)$ записываются в виде

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} S(\tau) d\tau}$$

или

$$W(t) = C_1 e^{-\int S(\tau) d\tau}.$$

Эти формулы называют формулами Лиувилля-Остроградского для линейной системы уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad i = \overline{1, n}.$$

Линейные неоднородные системы

$$\dot{X} = A(t)X + B(t). \qquad (6)$$

Теорема. *Общее решение системы (6) является суммой общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения данной неоднородной системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$Y(t)$ — фундаментальная матрица соотв. однородной системы,
$X = X(t)$ — произвольное решение неоднородной системы (6),
$X = \overline{X}(t)$ — какое-нибудь ее частное решение.

По Сл. 2 из Т. о принципе суперпозиции разность $X(t) - \overline{X}(t)$ — решение соответствующей однородной системы, следовательно

$$X(t) - \overline{X}(t) = Y(t)C,$$

$$X(t) = Y(t)C + \overline{X}(t).$$

Теорема. *Если известно общее решение однородной системы, соответствующей неоднородной системе* (6)*, то общее решение этой неоднородной системы находится с помощью квадратур.*

Доказательство теоремы — методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. В формуле общего решения

$$X = Y(t)C$$

будем считать произвольные постоянные функциями t:

$$X = Y(t)\,C(t). \tag{7}$$

По условию фундаментальная матрица $Y(t)$ известна. Подставим (7) в неоднородную систему (6)

$$\dot{Y}(t)C(t) + Y(t)\dot{C}(t) = A(t)Y(t)C(t) + B(t).$$

Если столбцы фундаментальной матрицы $X_1(t)$, $X_2(t), \ldots, X_n(t)$ удовлетворяют векторному уравнению $\dot{X} = A(t)X$, то сама матрица удовлетворяет матричному уравнению $\dot{Y} = A(t)Y$.

Полученное равенство

$$Y(t)\dot{C}(t) = B(t) \tag{8}$$

умножим слева на $Y^{-1}(t)$ (матрица $Y(t)$ невырожденная), получим

$$\dot{C}(t) = Y^{-1}(t)B(t).$$

$$C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau + \overline{C}.$$

где $\overline{C}$ – столбец произвольных постоянных.

Подставляем это выражение в формулу $X = Y(t)\,C(t)$:

$$X = Y(t)\overline{C} + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau. \tag{9}$$

$\square$

С помощью формулы (9) можно записать решение любой задачи Коши с начальными условиями $X(t_0) = X^0$:

$$X^0 = Y(t_0)\overline{C}, \qquad \text{тогда} \qquad \overline{C} = Y^{-1}(t_0)X^0.$$

$$X = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,X^0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Равенство (10) носит название **формулы Коши**.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \sin t. \end{cases}$$

Соответствующей однородной будет система

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Вектор-функции

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений однородной системы.

В общем решении

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

варьируем произвольные постоянные $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$ и выписываем алгебраическую систему с неизвестными $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ по образцу системы $Y(t)\dot{C}(t) = B(t)$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = 0, \\ -\dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = \sin t. \end{cases}$$

Основной определитель системы равен 1.

$$\dot{C}_1 = -\sin^2 t, \qquad \dot{C}_2 = \sin t \cos t,$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2} + \overline{C}_1, \qquad C_2 = \frac{\sin^2 t}{2} + \overline{C}_2.$$

В общем решении заменяем C_1 и C_2 полученными функциями:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overline{C}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \overline{C}_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \frac{\sin^2 t}{2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

§17. Линейные системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{X} = AX + B(t) \tag{11}$$

частный случай линейной системы с переменной матрицей $A(t)$.

Для линейной системы с постоянными коэффициентами всегда существует ФСР, состоящая из элементарных функций и известен эффективный способ построения ФСР.

Рассмотрим однородную систему с постоянными действительными коэффициентами

$$\dot{X} = AX, \tag{12}$$

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Характеристическим уравнением системы (12) называется

$$Det(A - \lambda E) = 0, \tag{13}$$

здесь E — единичная матрица $n \times n$, или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Корни этого уравнения называются **собственными значениями матрицы** A.

Пусть λ — собственное значение матрицы A. Возможны случаи.

I. Корень характеристического уравнения λ простой.

Найдем **собственный вектор**

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

матрицы A, соответствующий собственному значению λ:

$$A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} \neq 0.$$

Собственный вектор находится с точностью до скалярного множителя.

Простому собственному значению λ матрицы A в ФСР соответствует решение уравнения (12) вида

$$X = \mathbf{h} e^{\lambda t}.$$

Подстановкой в уравнение (12) проверим, что это действительно решение:

$$\dot{X} = \lambda \mathbf{h} e^{\lambda t} = A \mathbf{h} e^{\lambda t} = AX.$$

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad (\lambda+1)(\lambda-4) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 2;$$

$\lambda_1 = 1:$

Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, отвечающий собственному числу λ_1, находится из системы

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{h}_1 = 0:$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{cases} -2h_1 - 2h_2 & = 0 \\ 3h_1 + 3h_2 & = 0. \end{cases}$$

Получаем $h_1 = h_2$. Пусть $h_1 = 1$, тогда $h_2 = -1$, собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда корню λ_1 соответствует частное решение

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

$\lambda_2 = 2$:

собственный вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} -3h_1 - 2h_2 & = 0 \\ 3h_1 + 2h_2 & = 0. \end{cases}$$

Тогда $h_1 = -\frac{2}{3}h_2$. Возьмем $h_2 = -3$, получим $h_1 = 2$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Общим решением системы будет

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \\ -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

II. Корень характеристического уравнения λ кратности k, ему соответствует один или несколько собственных векторов $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_i$, $i \leq k$. Их можно выбрать так, чтобы каждый из них являлся **родоначальником СЕРИИ из ПРИСОЕДИНЕННЫХ векторов**. Например, $\mathbf{h}_1$ – собственный вектор – родоначальник **СЕРИИ** из p векторов $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^1, \quad \mathbf{h}_1^2, \quad \ldots, \quad \mathbf{h}_1^p$, удовлетворяющих уравнениям

$$A\mathbf{h}_1^1 = \lambda\mathbf{h}_1^1, \qquad \mathbf{h}_1^1 \neq 0,$$
$$A\mathbf{h}_1^2 = \lambda\mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_1^1,$$
$$\ldots$$
$$A\mathbf{h}_1^p = \lambda\mathbf{h}_1^p + \mathbf{h}_1^{p-1}.$$

Каждой серии, например, $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^1, \mathbf{h}_1^2, \ldots, \mathbf{h}_1^p$ соответствует p линейно независимых решений $X_1, \ldots, X_p$ системы $\dot{X} = AX$:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \mathbf{h}_1^1 e^{\lambda t},\\
&X_2 = (t\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_1^2)e^{\lambda t},\\
&X_3 = \left(\tfrac{t^2}{2!}\mathbf{h}_1^1 + t\mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_1^3\right) e^{\lambda t},\\
&\ldots,\\
&X_p = \left(\tfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}\mathbf{h}_1^1 + \tfrac{t^{p-2}}{(p-2)!}\mathbf{h}_1^p + \cdots + t\mathbf{h}_1^{p-1} + \mathbf{h}_1^p\right) e^{\lambda t}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Общее решение системы представляет собой линейную комбинацию вектор-функций вида (15), составленных для каждой серии и для каждого корня характеристического уравнения.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad (2-\lambda)(4-\lambda)+1=0; \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 = 3 \quad \text{— корень кратности 2.}$$

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad r = 1$$

Количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих кратному собственному значению: $\quad d = n - r = 2 - 1 = 1.$

Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$-h_1 + h_2 = 0, \qquad h_1 = h_2.$$

Положим $h_1 = 1$, тогда $h_2 = 1$, $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Частное решение

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Находим присоединенный вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$(A - \lambda_0 E)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad -h_1 + h_2 = 1.$$

Положим $h_1 = 0$, тогда $h_2 = 1$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Частное решение, линейно независимое с первым:

$$X_2(t) = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{3t},$$

или

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}; \qquad y = (C_1 + C_2 t + C_2) e^{3t}. \qquad \triangle$$

III. λ — комплексный корень характеристического уравнения.

Изложенные выше способы дают комплексные решения.

Для действительной матрицы A базис из серий можно выбрать так, чтобы серии, отвечающие действительным собственным значениям были действительными, а серии, отвечающие комплексно сопряженным собственным значениям были комплексно сопряжены.

Комплексные решения в ФСР заменяют их действительными и мнимыми частями.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad (1-\lambda)(3-\lambda)+2=0; \qquad \lambda^2-4\lambda+5=0.$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Достаточно рассмотреть $\lambda_1 = 2+i$:

Собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, отвечающий собственному числу λ_1, находится из системы

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{h}_1 = 0, \qquad \text{при этом,} \quad r(A-\lambda_1 E) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0; \qquad -2h_1 + (1-i)h_2 = 0$$

Получаем $h_2 = \frac{2}{1-i} h_1 = (1+i)h_1$.

Пусть $h_1 = 1$, тогда $h_2 = 1 + i$, собственный вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

Тогда корню λ_1 соответствует частное решение

$$X_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\, e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Вместо комплексных решений $X_1(t)$ и $X_2(t)$ в ФСР включаем действительную и мнимую часть решений.

Общим решением системы будет

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

§17. Механическая интерпретация систем ДУ.

Понятие динамической системы.

$$\dot{X} = F(t, X), \quad t \in R, \tag{1}$$

где

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, \quad \dot{X} = (\dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots, \dot{x_n}),$$

$$F(t, X) = (f_1(t, X), f_2(t, X), \ldots, f_n(t, X)),$$

t – независимая переменная, которая трактуется как время.

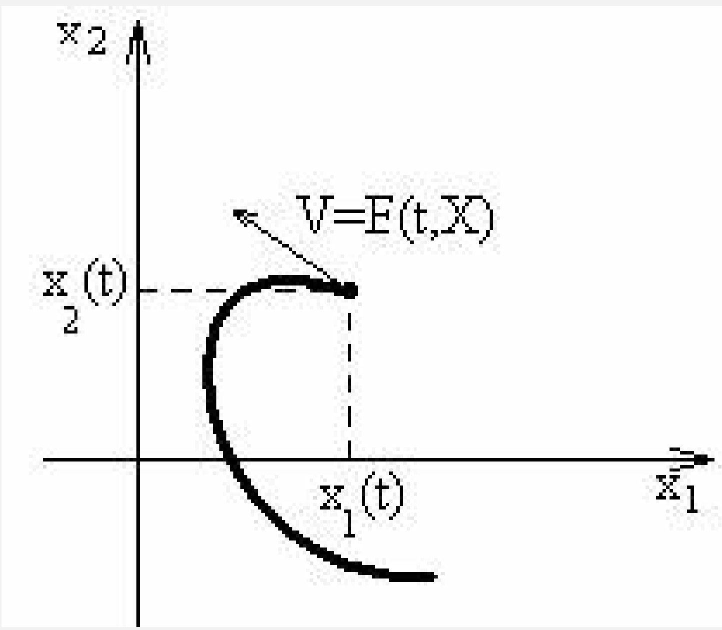
$$X = X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

– решение системы (1) трактуется как закон движения точки с координатами $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ в пространстве R^n в моменты t.

Если в каждой точке существует и единственно решение системы (1), то в каждой точке пространства R^n определена скорость движения.

Фазовое пространство – это область, в которой живёт $X \in R^n$.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – фазовый вектор системы.



Система (1) называется динамической системой. В фазовом пространстве рисуется траектория динамической системы. Если для всех решений системы (1) нарисовать траектории динамической системы, то получим фазовый портрет динамической системы.

Точка покоя динамической системы.

Опр. Точка $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется точкой покоя (равновесия) динамической системы (1), если для любых t выполняется: $F(t, X^0) \equiv 0$.

Если X^0 – точка покоя динамической системы (1), то $X(t) \equiv X^0$ – решение системы (1).

Автономные динамические системы.

<u>**Автономной**</u> называется система

$$\dot{X} = F(X), \quad t \in R \quad X \in R^n. \tag{2}$$

Далее будем предполагать, что $F(X)$ непрерывно дифференцируема по совокупности всех переменных, тогда для любых t существует и единственно решение задачи Коши.

Пусть $X = \varphi(t)$ – решение автономной динамической системы (2).

Рассмотрим $X = \psi(t) = \varphi(t + C)$, C- фиксированное из R.

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t + C)}{d(t + C)} = \dot{X}(t + C) = F(\varphi(t + C)) = F(\psi(t)).$$

Следовательно, $\psi(t) = \varphi(t + C)$ – также решение (2).

Обозначим $X = \varphi(t, \xi)$ – решение системы (2), которое удовлетворяет начальному условию

$$\varphi(0, \xi) = \xi.$$

Здесь ξ – произвольная точка фазового пространства $\Gamma \in R^n$, где выполняются условия теоремы Коши.

1. Если ξ фиксировано, а t меняется, то $X(t) = \varphi(t, \xi)$ определяет траекторию системы, исходящую из точки ξ.
2. Если t фиксировано, а ξ меняется, то функция $\varphi(t, \xi)$ определяет преобразование фазового пространства (области из R^n) в себя; правило этого преобразования:

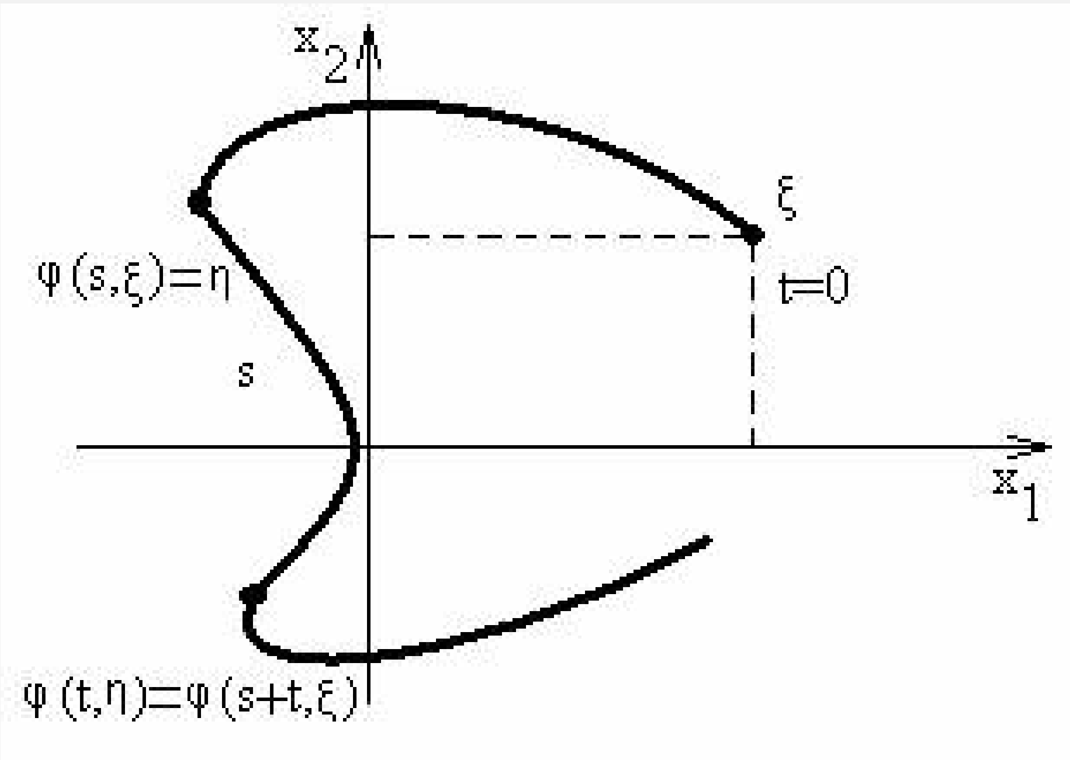
$$\xi \in R^n \to \varphi(t, \xi) \in R^n$$

– точка, в которую перешла бы точка ξ по траектории этой системы через время t.

Зафиксируем время s; точка двигалась время s,

$$\eta = \varphi(s, \xi);$$

далее η берём за начальную точку. Пусть прошло время t, тогда



Т.к. $X(t) = \varphi(t, \xi)$ – решение (2), то $X(t) = \varphi(t+s, \xi)$ – тоже решение (2).

Рассмотрим два решения (2) $X(t) = \varphi(t, \xi)$ и $X(t) = \varphi(t + s, \xi)$. Имеем при $t = 0$

$$X(0) = \varphi(0, \eta) = \eta$$

$$X(0) = \varphi(0 + s, \xi) = \varphi(s, \xi) = \eta$$

Эти два решения исходят из одной точки и в силу теоремы Коши совпадают для любых t.

Следовательно, точка движется по одной траектории, в независимости от выбора начальной точки.

Для любых фиксированных, но произвольных ξ, t, s

$$\varphi(t + s, \xi) = \varphi(t, \eta) = \varphi(t, \varphi(s, \xi))$$

Получаем
$$\varphi(t+s,\xi)=\varphi(t,\varphi(s,\xi))$$
– групповое свойство автономных динамических систем.

Если система не является автономной, то из того, что $\varphi(t,\xi)$ – решение системы, не следует, что $\varphi(t+s,\xi)$ – также решение этой системы, т.е. инвариантности относительно сдвижек пространства.

В автономных системах в каждой точке фазового пространства скорость в этой точке не зависит от времени, что неверно для динамических систем в целом.

Пусть t фиксировано ($\xi \in \Gamma$ произвольно); $\varphi(t,\xi) : R^n \to R^n$.

Перебирая все фиксированные t, получим множество преобразований $\{\varphi(t,\xi)\}_t$.

Можно ввести **операцию умножения** как последовательное действие операций, тогда относительно этой операции множество преобразований $\{\varphi(t,\xi)\}_t$. является группой:

$\varphi(t+s,\xi)=\varphi(t,\varphi(s,\xi))$ – обеспечивает ассоциативность;

$\varphi(0,\xi)=\xi$ – нейтральный элемент;

$\varphi(t,\xi)$ и $\varphi(-t,\xi)$ являются обратными элементами.

Свойства и виды траекторий автономных систем.

Утверждение. Траектории автономной системы либо совпадают, либо не пересекаются.

Доказательство: От противного: траектории не совпадают, но пересекаются, т.е. существуют $\xi_1 \neq \xi_2$, t_1, t_2, такие что

$$\varphi(t_1, \xi_1) = \varphi(t_2, \xi_2),$$

тогда для любого момента t справедливо

$$\varphi(t, \varphi(t_1, \xi_1)) = \varphi(t, \varphi(t_2, \xi_2)).$$

Согласно групповому свойству

$$\varphi(t + t_1, \xi_1) = \varphi(t + t_2, \xi_2),$$

т.е. траектории пересекаются во всех точках. Получено противоречие. Утверждение доказано.

Траектории автономных систем.

<u>Точки покоя</u>

$\xi \in R^n$ такая, что для любого t $\varphi(t, \xi) = \xi$.

<u>Траектория без самопересечения</u>

Для любых $t_1 \neq t_2$ следует $\varphi(t_1, \xi) \neq \varphi(t_2, \xi)$.

<u>Замкнутые траектории(циклы)</u> Существуют $t_1 \neq t_2 \neq t_3$, такие что

$$\varphi(t_1, \xi) = \varphi(t_2, \xi) \neq \varphi(t_3, \xi).$$

<u>Период.</u> Обозначим период через T.

Пусть $t_1 < t_2$, $T = t_2 - t_1$. Тогда

$$\varphi(t_1, \xi) = \varphi(t_2, \xi) = \varphi(t_1 + T, \xi).$$

Следовательно, для любых t

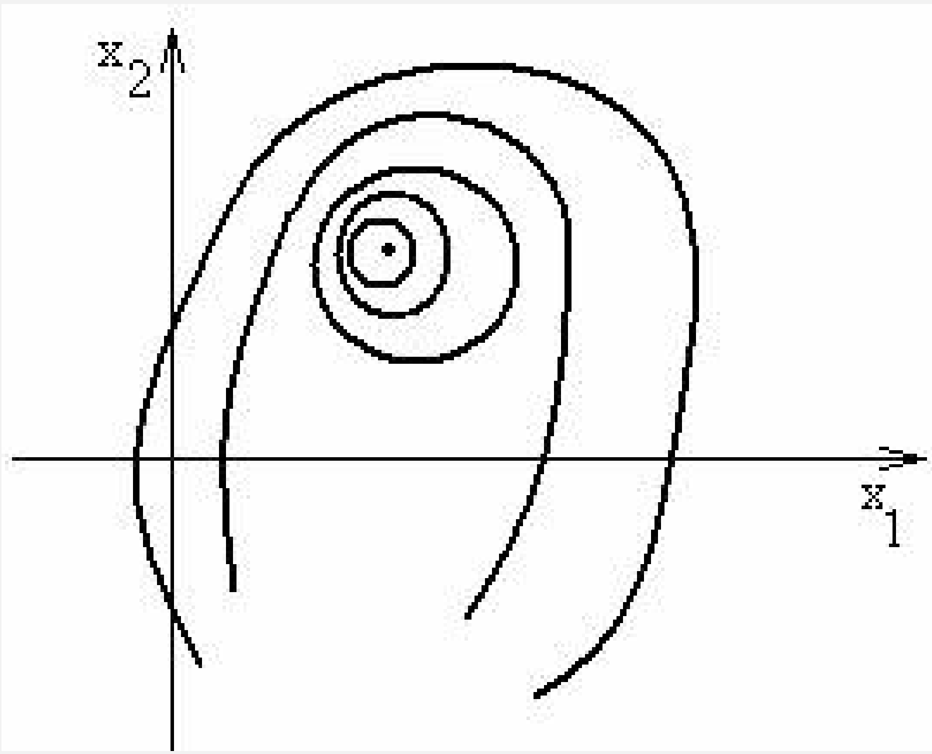
$$\varphi(t,\xi) = \varphi(t - t_1 + t_1, \xi) = \varphi(t - t_1, \varphi(t_1, \xi)) =$$

$$= \varphi(t - t_1, \varphi(t_1 + T, \xi)) = \varphi(t - t_1 + t_1 + T, \xi) = \varphi(t + T, \xi).$$

Итак, для любых t имеем $\varphi(t,\xi) = \varphi(t+T,\xi)$, значит существуют периодические решения автономной системы.

Фазовый портрет автономной динамической системы.

Фазовый портрет автономной динамической системы может иметь следующий вид:



Элементы теории устойчивости по Ляпунову

Уравнение возмущенного движения.

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{3}$$

Γ :   выполнены условия Т. $\exists$ и $\exists!$

Точка $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется **точкой покоя (положением равновесия)** динамической системы (3), если $F(t, X^0) \equiv 0$. Если X^0 — точка покоя динамической системы (3), то $X(t) \equiv X^0$ — решение системы.

$X = \Psi(t)$ — решение, исследуемое на устойчивость (невозмущенное движение).

$X = Y(t)$ — любое другое решение системы (возмущенное движение).

Разность $Z(t) = Y(t) - \Psi(t)$ называется возмущением.

Выведем ДУ, которому удовлетворяет возмущение. Имеем

1) $Y(t) = Z(t) + \Psi(t)$,

2) $\dot{Y}(t) \equiv F(t, Y(t))$, $\qquad \dot{\Psi}(t) \equiv F(t, \Psi(t))$,

$$\dot{Z}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{\Psi}(t) = F(t, Y(t)) - F(t, \Psi(t)) =$$

$$= F(t, Z(t) + \Psi(t))) - F(t, \Psi(t)) = G(t, Z(t)).$$

$\dot{Z} = G(t, Z)$ — уравнение возмущенного движения.

Невозмущенному движению $X = \Psi(t)$ соответствует тривиальное решение $Z \equiv 0$ системы возмущенного движения (положение равновесия).

Автономные системы:

$$\dot{X} = F(X). \tag{4}$$

Пусть $F(X)$ удовлетворяет условию $F(0) = 0$,
тогда $X \equiv 0$ — положение равновесия системы (4).

Задача устойчивости тривиального решения **относительно начальных возмущений**.

Введем обозначения:

$X = \varphi(t;\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$– это решение системы (4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0;\xi) = \xi$.

Условие продолжимости вправо:

найдется некоторая σ-окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$, что
для любых начальных данных ξ из этой σ-окрестности
решение $X = \varphi(t;\xi)$ определено для любого $t \geqslant 0$.

Определение 1. *Тривиальное решение* $X \equiv 0$ *системы* (4) *называется у с т о й ч и в ы м п о Л я п у н о в у*, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\delta \leqslant \varepsilon) \quad (\forall \xi : \quad |\xi| < \delta \Rightarrow |\varphi(t;\xi)| < \varepsilon)$$

для всех $t \geqslant 0$.

Определение 2. *Тривиальное решение* $X \equiv 0$ *системы* (4) *называется а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м*, *если оно*

1) *устойчиво по Ляпунову*

и

2) $\exists \rho > 0$, $\forall \xi : |\xi| < \rho$, *имеет место*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t;\xi) = 0.$$

Понятие функции Ляпунова.

$$\dot{X} = F(X), \quad X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

$$V = V(X) = V(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$V : V \to R$ — функция Ляпунова, если

1) V определена в открытой области $D \subseteq R^n$ и D содержит начало координат (н.к.), т.е $X = 0$. Значит, в область D можно вписать n-мерную сферу с центром в н.к.

2) $V(0) = 0$.

3) $V(X)$ – непрерывна в D и существуют $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ которые также непрерывны в D.

Среди функций Ляпунова выделяют следующие виды функций:

1. Функция Ляпунова $V(X)$, $X \subseteq D$ называется определенно положительной, если

$$\forall X \subseteq D : X \neq 0 \quad V(X) > 0.$$

2. Функция Ляпунова $V(X)$, $X \subseteq D$ называется определенно отрицательной, если

$$\forall X \subseteq D : X \neq 0 \quad V(X) < 0.$$

3. Функция Ляпунова $V(X)$, $X \subseteq D$ называется постоянно положительной, если

$$\forall X \subseteq D \quad V(X) \geq 0.$$

4. Функция Ляпунова $V(X)$, $X \subseteq D$ называется постоянно отрицательной, если

$$\forall X \subseteq D \quad V(X) \leq 0.$$

5. Функция Ляпунова $V(X)$, $X \subseteq D$ называется знакопеременной, если в любой окрестности н.к. существуют точки, в которых $V(X)$ имеет разные знаки.

Примеры функций Ляпунова:

1) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (определенно положительная);

2) $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ (постоянно положительная);

3) $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ (знакопеременная);

4) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ (постоянно положительная)

Полная производная функции Ляпунова в силу системы

$$\dot{X} = F(X) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5}$$

Пусть $V(X)$ — какая-то функция Ляпунова.

Зафиксируем X (произвольная точка из Γ), t_0 – произвольный момент времени и

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$$

– решение рассматриваемой системы, такое что

$$\varphi(t_0) = X.$$

Тогда

$$V(t) = V(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)).$$

Функция $\dot{V}_{(5)} = \frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_0}$ называется **полной производной функции Ляпунова в силу системы**

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt}\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t))}{\partial x_i} \cdot f_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} \cdot f_i(X).$$

Формула для полной производной функции Ляпунова в силу системы (5)

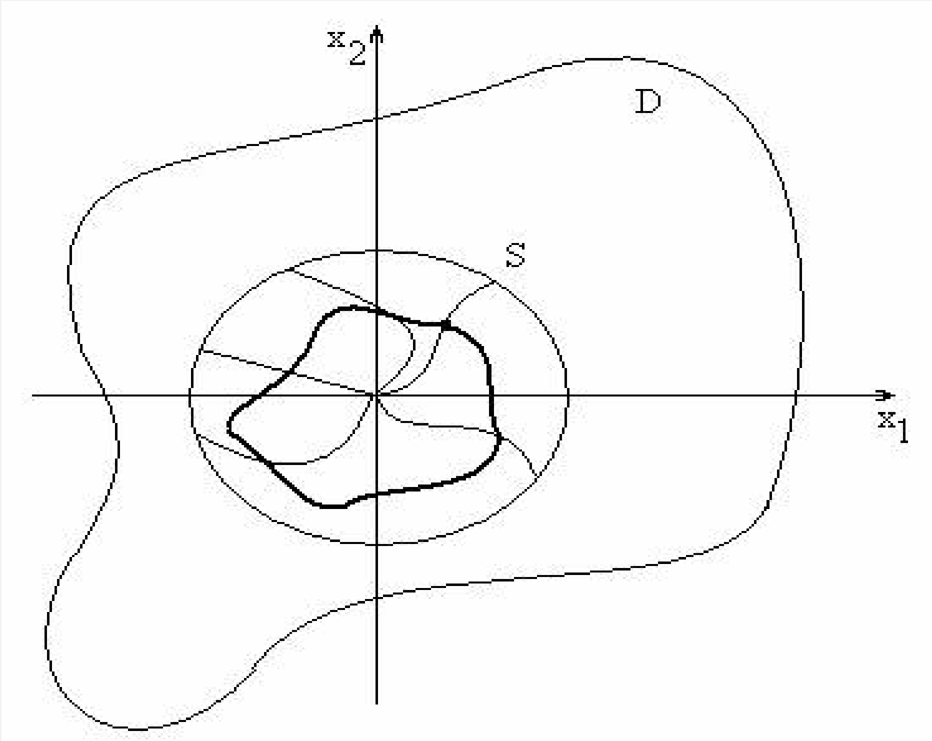
$$\forall X \subset D \qquad \dot{V}_{(5)} = \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} \cdot f_i(X).$$

При этом, $\dot{V} = \dot{V}(X)$ снова функция Ляпунова, т.к. непрерывно дифференцируема в области D и $\dot{V}(0) = 0$.

Пусть - произвольная константа. **Линия уровня** функции $V(X)$ - это множество точек из R^n, удовлетворяющих $V(X) = C$.
Множество Лебега для функции $V(X)$ - это множество точек из R^n, удовлетворяющих $V(X) \leq C$.

Лемма о замкнутости линии уровня функций Ляпунова.

Пусть функция Ляпунова $V(X)$ определенно положительна (определенно отрицательна) в открытой области D. Тогда для любой сферы S, целиком лежащей в D и с центром в начале координат, существует число $h > 0$ $(h < 0)$, такое что при любом $C : 0 < C < h (h < C < 0)$, любая непрерывная кривая, соединяющая начало координат с произвольной точкой сферы S, обязательно пересекает линию уровня функции Ляпунова $V(X) = C$.



Линия уровня не может проходить через начало координат, т.к. существует единственная точка (н.к.), в которой $V(X)$ обращается в нуль, но также не может выйти за границу сферы S. Следовательно, все линии уровня вложены друг в друга и не пересекаются, а значит, приближаются к н.к. при радиусе сферы, стремящимся к нулю, и бесконечно расширяются при бесконечном увеличении радиуса сферы.

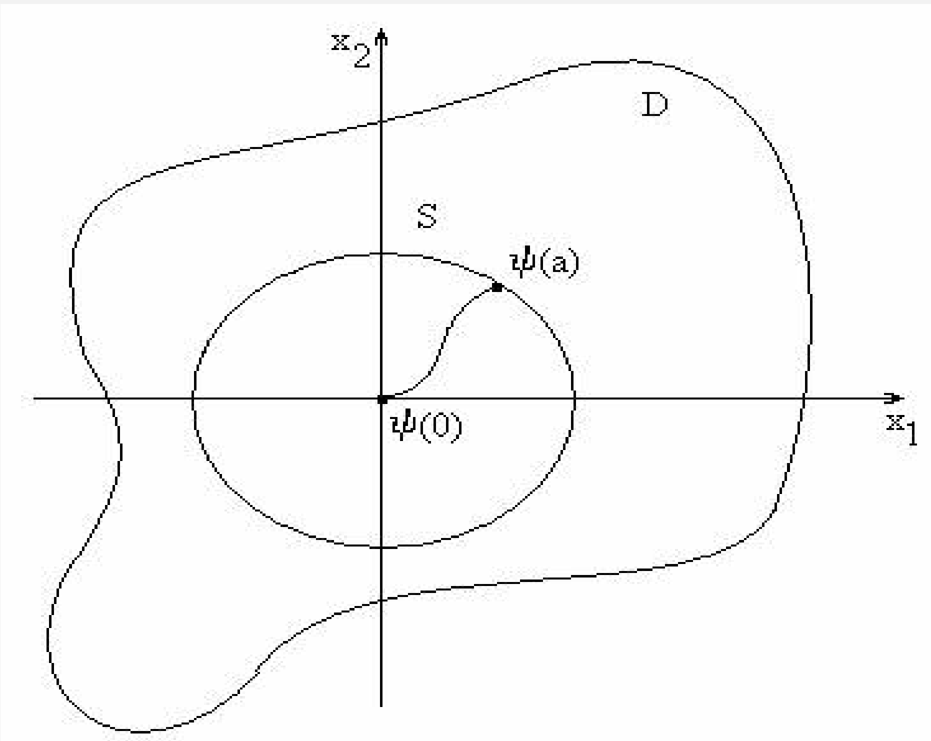
Доказательство. Для доказательства необходимо найти h с нужными свойствами.

Положим

$$h = \min_{X \in S} V(X).$$

Этот минимум достигается, т.к. $V(X)$ определена и непрерывна на компакте S: $h > 0$, т.к значение функции Ляпунова во всех точках, лежащих на сфере, строго больше нуля.

Пусть $\psi(s)$ - непрерывная функция, описывающая кривую, соединяющую н.к. с произвольной точкой сферы S.



Построим функцию

$$v(s) = V(\psi(s)),$$

$$v(0) = V(\psi(0)) = V(0) = 0,$$

$$v(a) = V(\psi(a)) \geq h,$$

т.к. $\psi(a)$ лежит на сфере S и h – минимальное значение $V(X)$ в точках, лежащих на сфере S. функция $v(s)$ непрерывна на $[0, a]$ как композиция непрерывных функций. Тогда

$$\forall C \in (0, h) \quad \exists \bar{s} \in (0, a) : v(\bar{s}) = C.$$

Значит кривая $\psi(s)$ пересекает линию уровня:

$$V(\psi(\bar{s})) = v(\bar{s}) = C.$$

Лемма доказана.

Теоремы второго метода Ляпунова

В теории устойчивости движения выделяют два метода Ляпунова.

- Первый, или прямой метод Ляпунова используется для исследования устойчивости тривиального решения системы по виду её общего решения. Этот метод используется для автономных систем, когда известно, как найти общее решение.
- Второй метод Ляпунова применим для нелинейных систем и позволяет исследовать тривиальное решение на устойчивость, не находя общего решения системы.

Теорема 1 об устойчивости.

Если существует функция Ляпунова $V(X)$, определенно положительная в открытой области D, производная которой в силу системы (5) является постоянно отрицательной или тождественно равной нулю, то тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (5) устойчиво.

Доказательство. Требуется показать, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad (\delta < \varepsilon) \quad (\forall\xi : \quad |\xi| < \delta \Rightarrow |\varphi(t;\xi)| < \varepsilon)$$

для всех $t \geqslant 0$. Здесь

$$X = \varphi(t, \xi),$$

– решение системы (5), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(0, \xi) = \xi.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Введем обозначения:

$\bar{B}_\varepsilon = \{X \in R^n : |X| \leq \varepsilon\}$ – замкнутый шар;

$B_\varepsilon = \{X \in R^n : |X| < \varepsilon\}$ – открытый шар;

$S_\varepsilon = \{X \in R^n : |X| \le \varepsilon\}$ – сфера.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\bar{B}_\varepsilon \in D$.

Положим

$$l = \min_{X \in S_\varepsilon} V(X) > 0.$$

Величина $V(X)$ непрерывна в D и $V(0) = 0$, тогда по определению непрерывности в нуле

$$\exists \delta > 0 \quad (\forall \xi \in R^n : |\xi| < \delta) \Rightarrow V(\xi) < l$$

Покажем, что δ искомое, т.е.

$$(\forall \xi \in R^n : |\xi| < \delta) \Rightarrow (\forall t \geqslant 0 \quad \varphi(t, \psi) < \varepsilon) :$$

1) при $t = 0 \quad |\varphi(0, \xi)| = |\xi| < \delta < \varepsilon;$

2) О.П.:

$$\exists t = T > 0 : \forall t \in [0, T) \quad |\varphi(t, \xi)| < \varepsilon$$

и $|\varphi(T, \xi)| = \varepsilon$ в силу непрерывности решения.

Тогда : а) $\varphi(T, \xi) \in S_\varepsilon \Rightarrow V(T, \xi) \geq l$;
б) $\dot{V}_\varepsilon(\varphi(t, \xi)) \leq 0 \Rightarrow V(\varphi(t, \xi))$ не возрастает на $[0, +\infty)$ и

$$V(\varphi(T, \xi)) \leq V(\varphi(0, \xi)) = V(\xi) < l;$$

а) и б) дают противоречие, а значит, полученное является искомым, участвующим в определении устойчивости. Теорема доказана.

Теорема 2 об асимптотической устойчивости.

Если существует функция Ляпунова $V(X)$, определенно положительная в открытой области D, производная которой в силу системы (5) является определенно отрицательной, то тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (5) асимптотически устойчиво.

Теорема 3 о неустойчивости.

Если существует функция Ляпунова $V(X)$, не являющаяся постоянно положительной в любой окрестности начала координат, производная которой в силу системы (5) является определенно отрицательной, то тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (5) неустойчиво.

Часть 2. Разностные уравнения

§1. Введение.

Нестрогое определение:

Разностные уравнения — это уравнения относительно неизвестной последовательности.

Разностные уравнения часто используются

- в моделях экономической динамики с дискретным временем,
- для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Разностные уравнения возникают, например, в процессе приближенного решения ОДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

аналитическое решение которого недоступно.

По определению производной

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Следовательно, приближенно

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

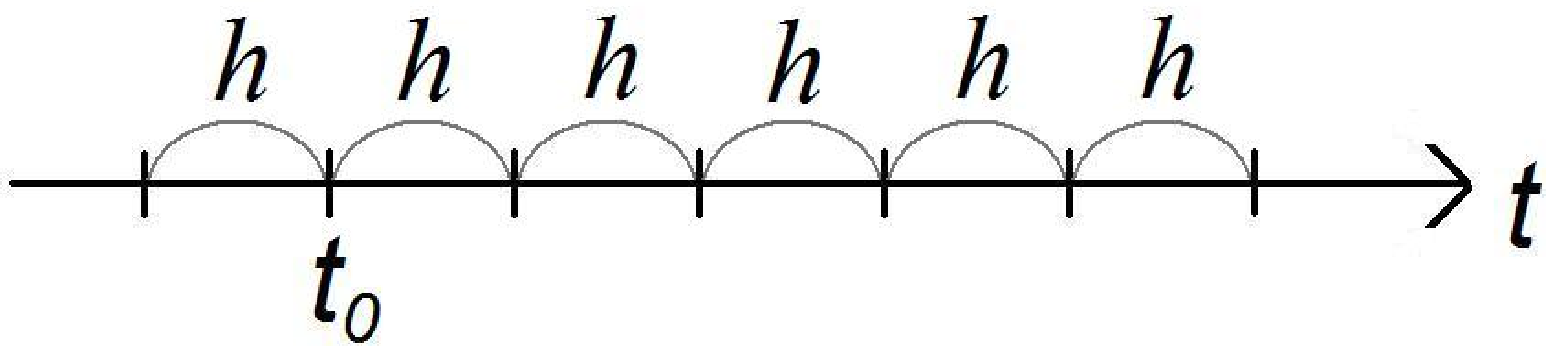
с маленькой ошибкой при малых h.

Поэтому дифференциальное уравнение можно приблизить уравнением

$$x(t+h) = x(t) + h\, f(t, x(t)). \tag{2}$$

Практическое применение уравнения (2) $x(t+h) = x(t) + h\, f(t, x(t))$:

на оси времени выделяется последовательность точек, называемая **сеткой**



$h > 0$ — фиксированный **шаг сетки**,

t_0 — заданный начальный момент времени,

рассматривают лишь дискретные значения времени — **узлы сетки**

$$t_k = t_0 + k \cdot h, \qquad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $y(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ — искомая функция, определенная на множестве узлов сетки. Рассмотрим относительно функции y уравнение

$$y(k+1) = y(k) + h\,f(t_0 + k\,h,\, y(k)). \tag{3}$$

Это пример разностного уравнения **первого порядка**.

Приближенный метод решения ОДУ при помощи разностного уравнения (3) называется **методом Эйлера**.

Если задано начальное значение $\qquad x(t_0) = y(0),$

то из уравнения (3) последовательно определим значения

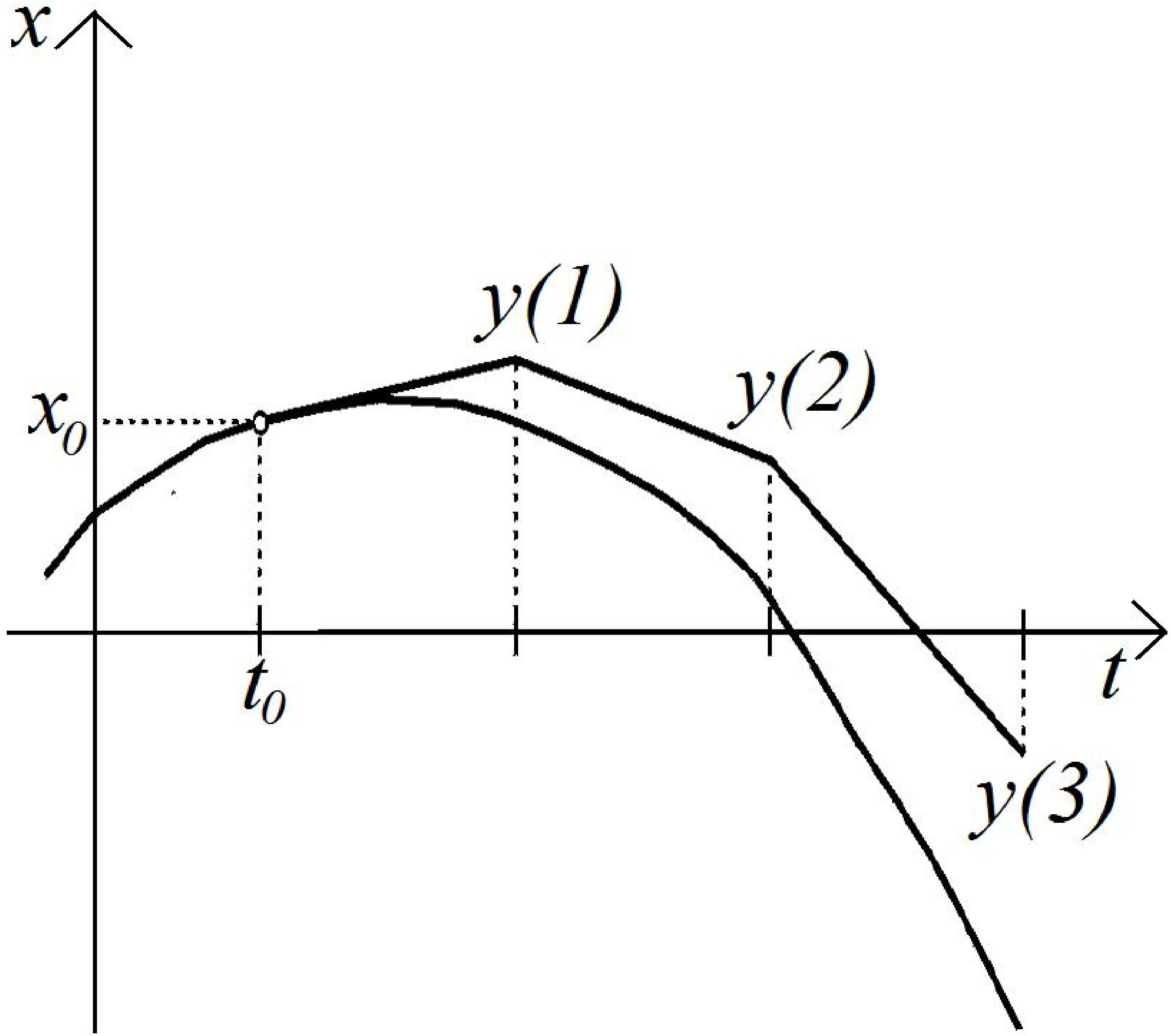
$$y(1), \qquad y(2), \qquad y(3), \qquad y(4), \ldots$$

приближенно равные значениям

$$x(t_0 + h), \qquad x(t_0 + 2h), \qquad x(t_0 + 3h), \qquad x(t_0 + 4h), \ldots$$

решения задачи Коши для ДУ (1) в узлах сетки.

Геометрическая интерпретация



Многие процессы в экономике изменяют свое состояние не непрерывно, а дискретно:

- официальный курс доллара устанавливается один раз в день;
- стоимость многих ценных бумаг, величина банковских вкладов рассчитывается с точностью до одного дня;
- зарплата, проценты по вкладам выплачиваются один раз в месяц;
- статистические данные о состоянии предприятия, отрасли, государства подготавливаются ежемесячно, ежеквартально, ежегодно.

Такие данные невозможно получать непрерывно.

§2. Основные определения.

Разностным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$x(t+n) = V(t,\, x(t),\, x(t+1),\, \ldots,\, x(t+n-1)), \tag{4}$$

где $t \in \mathbb{N}$.

Замечание. Уравнение

$$x(t+4) = x(t+2)$$

не следует считать уравнением 4-го порядка. После замены времени $\tau = t+2$ получим уравнение 2-го порядка

$$x(\tau+2) = x(\tau).$$

Решением разностного уравнения называется всякая последовательность $\varphi(t)$, для которой

$$\varphi(t+n) = V(t, \varphi(t), \varphi(t+1), \ldots, \varphi(t+n-1))$$

при всех $t \in \mathbb{N}$.

Положением равновесия для разностного уравнения называется решение $\varphi(t) \underset{t\in\mathbb{N}}{\equiv} x_0$.

Теорема (Существования и единственности решения разностного уравнения).

Для любого набора начальных значений $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение уравнения n-го порядка (4), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(1) = u_1$, $\varphi(2) = u_2$, $\ldots \varphi(n) = u_n$.

Доказательство: индукцией по t, $t \in \mathbb{N}$.

§3. Примеры разностных уравнений.

Пример 1. Арифметическая прогрессия.

Пусть $x(t)$ — элемент арифметической прогрессии с номером t, а d — разность прогрессии. Тогда

$$x(t+1) = x(t) + d$$

разностное уравнение 1-го порядка, не имеющее при $d \neq 0$ положений равновесия.

Пример 2. Геометрическая прогрессия со знаменателем q определяется разностным уравнением 1-го порядка

$$x(t+1) = q\,x(t).$$

Число x_0 — положение равновесия $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = q\,x_0 \quad \Leftrightarrow \quad (q = 1)$ или $(x_0 = 0)$.

Пример 3. Рост процентного вклада. Пусть $x(t)$ — величина вклада после t месяцев, R — месячная процентная ставка. Тогда

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t).$$

Пример 4. Рост процентного вклада с регулярными взносами

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t) + P.$$

где P — величина ежемесячного взноса.

Пример 5. Величина долга по займу с регулярными выплатами

$$x(t+1) = \left(1 + \frac{R}{100}\right) x(t) - P.$$

где P — размер выплат.

Пример 6. Последовательность Фибоначчи

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad \ldots$$

удовлетворяет разностному уравнение 2-го порядка

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t)$$

и начальным условиям $x(1) = 1, \quad x(2) = 1.$

Пример 7. Паутинообразная модель рынка.

Модель рыночного регулирования цены на рынке одного товара.

Обозначения:

$P(t)$ — цена товара, $D(t)$ — величина спроса на товар, $S(t)$ — величина предложения товара в период t.

Предположения:

1) функция спроса линейно зависит от текущей цены товара

$$D(t) = \alpha + A \cdot P(t),$$

где $A < 0$, α — постоянные параметры;

2) функция предложения линейно зависит от цены товара за предыдущий период

$$S(t) = \beta + B \cdot P(t-1),$$

где $B > 0$, β — постоянные параметры (предложение сегодня складывается на основе вчерашних цен);

3) цена каждого периода устанавливается так, чтобы уравнять спрос и предложение

$$D(t) = S(t);$$

4) известна начальная цена $P(0)$.

Отсюда

$$\alpha + A \cdot P(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$$

или

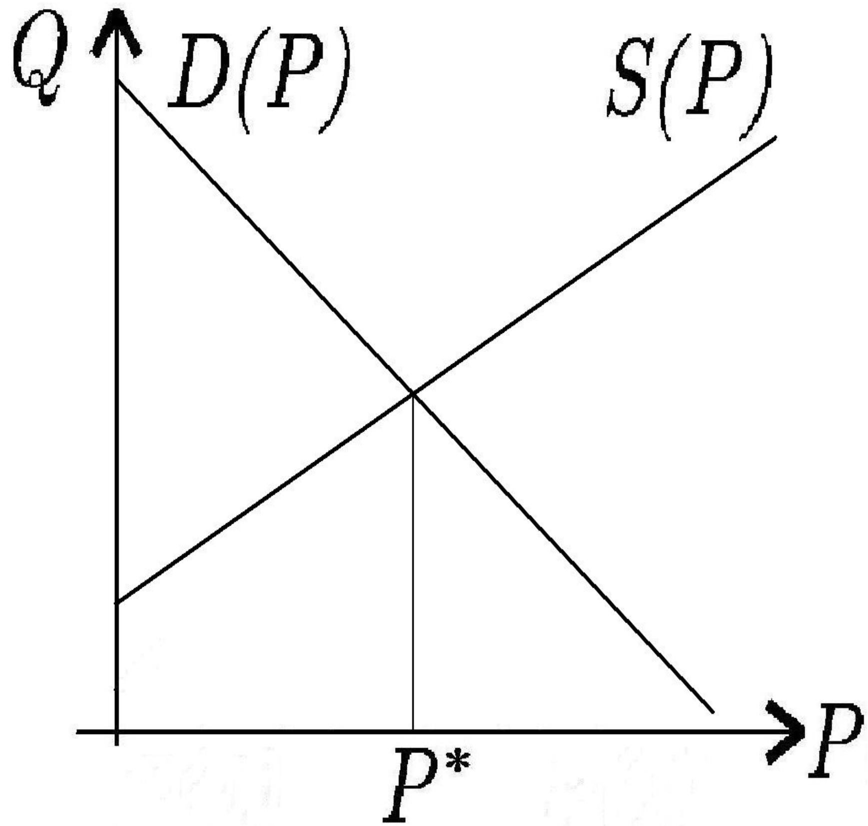
$$P(t) = \frac{B}{A}\,P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}.$$

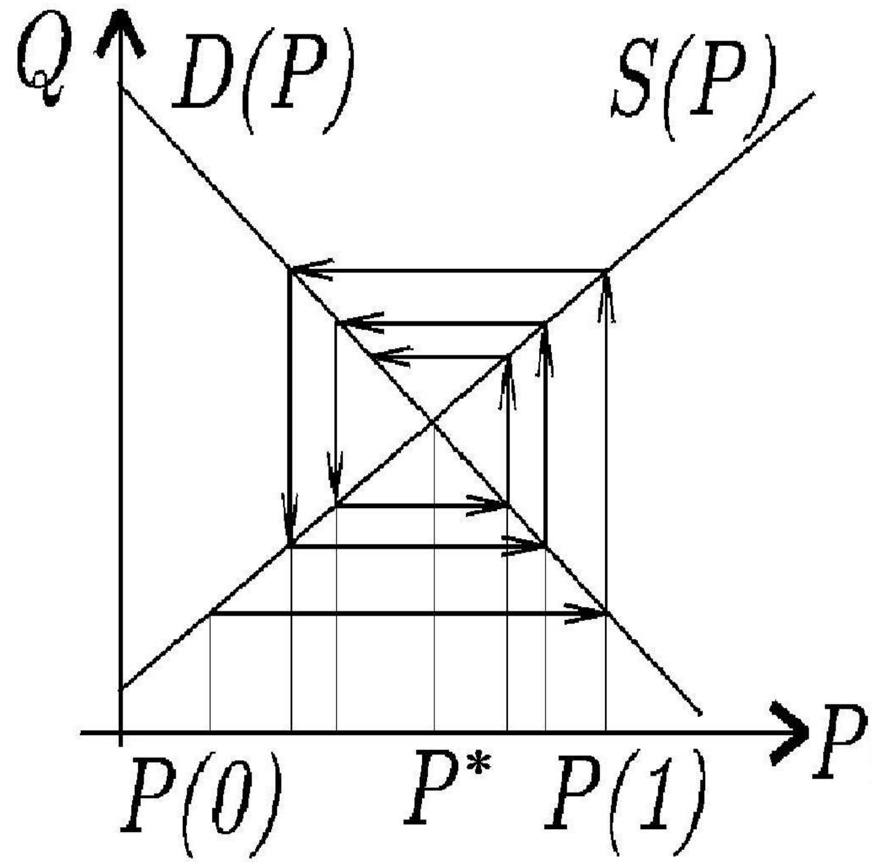
Это линейное неоднородное разностное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами.

Графическая интерпретация процесса рыночного регулирования цены.

В системе координат (P, Q) прямые $D = \alpha + A \cdot P$ и $S = \beta + B \cdot P$.

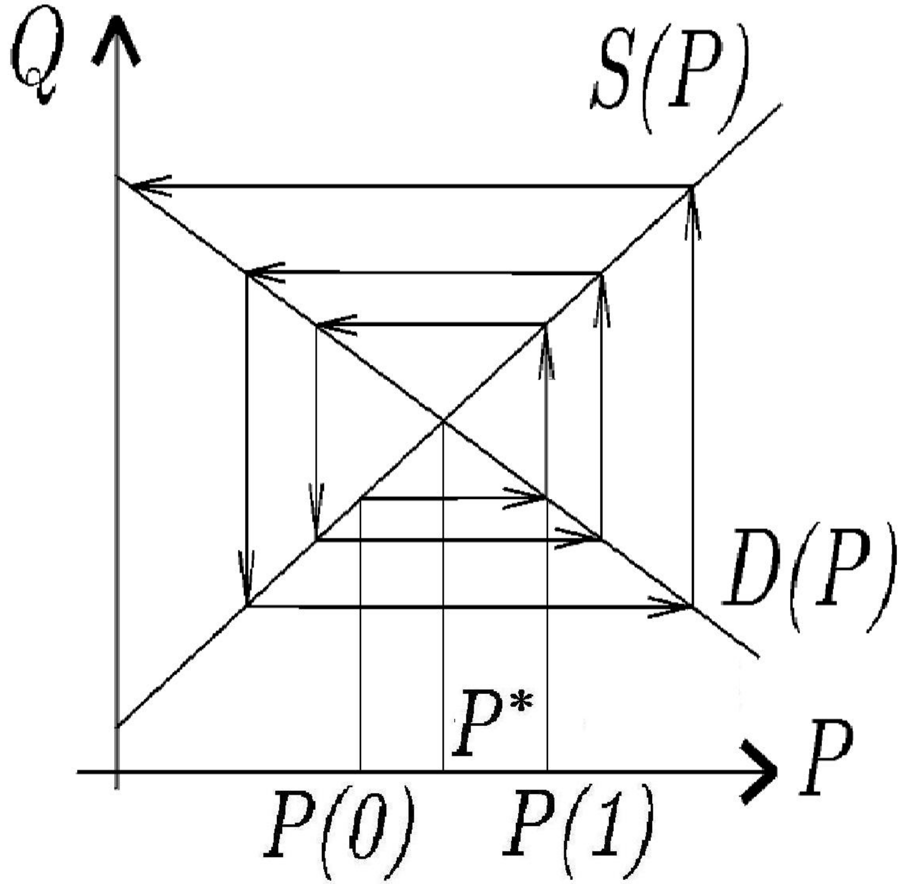
Точка пересечения прямых соответствует положению равновесия на рынке — равновесной цене P^*.





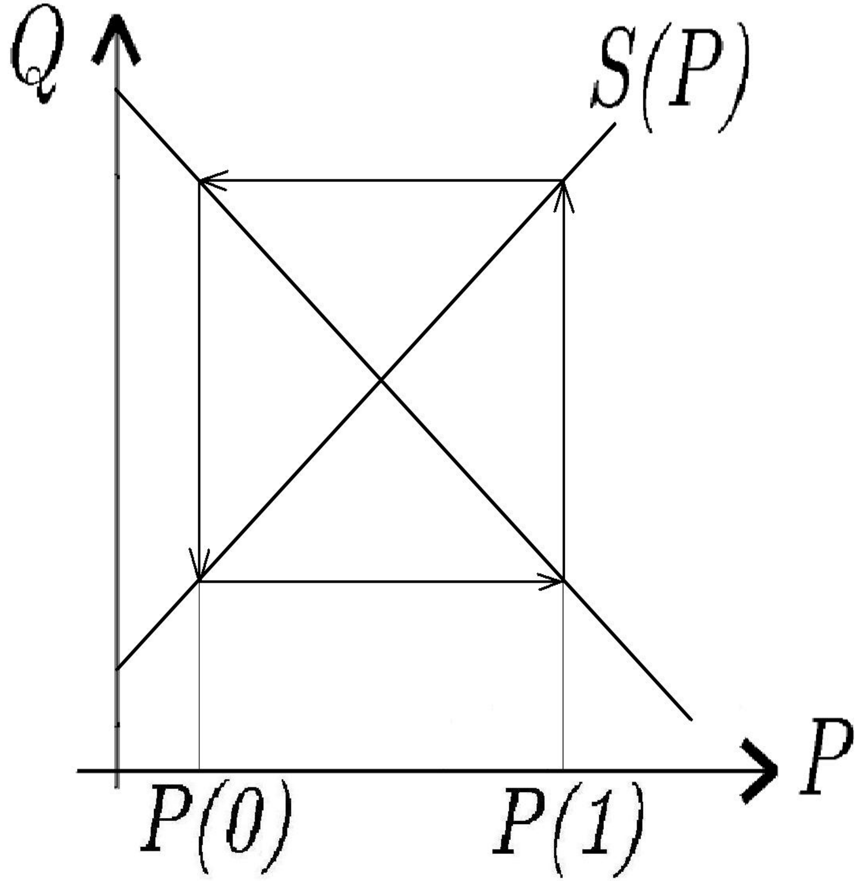
Если $\left|\dfrac{B}{A}\right| < 1$, то паутина сходится к точке равновесия,

т.е. $$\lim_{t\to+\infty} P(t) = P^*.$$



В случае $\left|\frac{B}{A}\right| > 1$, то паутина расходится.

Колебания цены увеличиваются с каждым новым периодом.



В случае $\left|\dfrac{B}{A}\right| = 1$ цена меняется циклически (повторяется через каждые два периода).

Пример 8. Модель делового цикла (Самуэльсона-Хикса).

описывает волнообразный характер развития экономики — чередование подъемов и спадов конъюнктуры.

Предположения:

1) Величина потребления в любой период времени является линейной функцией национального дохода за предыдущий период

$$C(t) = aY(t-1) + b, \qquad \text{где} \qquad 0 < a < 1, \quad b > 0$$

(число a — коэффициент склонности к потреблению).

2) Текущий объем инвестиций пропорционален с некоторым коэффициентом приращению национального дохода за предыдущий период

$$I(t) = \lambda(Y(t-1) - Y(t-2)),$$

λ — коэффициент акселерации. Допускается $I(t) < 0$.

3) Выполняется закон сохранения:

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

В результате получается

$$Y(t) = aY(t-1) + b + \lambda(Y(t-1) - Y(t-2))$$

или

$$Y(t) = (a+\lambda)\, Y(t-1) - \lambda Y(t-2) + b.$$

Замена нумерации моментов времени $\tau = t - 2$.

$$Y(\tau+2) = (a+\lambda)\, Y(\tau+1) - \lambda Y(\tau) + b.$$

линейное неоднородное разностное уравнение 2-го порядка

с постоянными коэффициентами.

§4. Методы решения линейных разностных уравнений.

Линейным разностным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t), \qquad (5)$$

где $a_1(t), \ldots, a_n(t), \quad b(t)$ — некоторые функции от номера t, $a_n(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{N}$.

Если $b(t) \underset{t\in\mathbb{N}}{\equiv} 0$, то уравнение называется **однородным**.

Если коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ не зависят от t, то уравнение называется линейным разностным уравнением **с постоянными коэффициентами**.

Теорема (Принцип суперпозиции)

Если в уравнении (5) правая часть $b(t)$ имеет вид

$$b(t) = \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t),$$

где α_1 и α_2 — постоянные числа, и известно, что $\varphi_1(t)$ есть частное решение уравнения (5) с правой частью $b_1(t)$, а $\varphi_2(t)$ — частное решение уравнения (5) с правой частью $b_2(t)$, то $\varphi(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)$ является частным решением исходного уравнения (5).

Теорема (об общем виде решений линейного однородного уравнения $x(t+n)+a_1(t)\,x(t+n-1)+\ldots+a_n(t)\,x(t)=0$).

1. Всякая система решений $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ с линейно независимыми начальными значениями

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_1(2) \\ \vdots \\ \varphi_1(n) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \varphi_2(1) \\ \varphi_2(2) \\ \vdots \\ \varphi_2(n) \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \varphi_n(1) \\ \varphi_n(2) \\ \vdots \\ \varphi_n(n) \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений;

2. Если $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_n(t)$ — какая-нибудь фундаментальная система решений, то любое решение $\varphi(t)$ уравнения может быть единственным способом представлено в виде их линейной комбинации

$$\varphi(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(t)$$

с некоторыми числовыми коэффициентами C_1, …, C_n, определяемыми из начальных условий. ▲

Теорема (об общем виде решений неоднородного разностного уравнения $x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t)$).

Пусть $x = x_{\text{част}}(t)$ — некоторое решение неоднородного уравнения, а $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Тогда любое решение $\varphi(t)$ уравнения может быть единственным способом представлено в виде

$$\varphi(t) = x_{\text{част}}(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + \ \ldots + \ \lambda_n\varphi_n(t)$$

где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ — постоянные, определяемые из начальных условий.

▲

Методы решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для линейного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x(t+n) + a_1\, x(t+n-1) + \ldots + a_n\, x(t) = 0 \tag{6}$$

уравнение

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{7}$$

называется **характеристическим**.

Теорема (о построении фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения по корням характеристического уравнения).

Если каждому вещественному корню λ кратности k поставить в соответствие функции

$$\lambda^t, \quad t\,\lambda^t, \quad \dots \quad t^{k-1}\lambda^t,$$

а каждому комплексному корню $\lambda = r(\cos\,\omega + i\sin\,\omega)$ кратности k и сопряженному корню $\overline{\lambda} = r(\cos\,\omega - i\sin\,\omega)$ поставить в соответствие функции

$$r^t\cos\,\omega t, \quad t\,r^t\cos\,\omega t, \quad \dots, \quad t^{k-1}r^t\cos\,\omega t,$$
$$r^t\sin\,\omega t, \quad t\,r^t\sin\,\omega t, \quad \dots, \quad t^{k-1}r^t\sin\,\omega t,$$

то объединение всех таких функций будет одной из фундаментальных систем решений данного уравнения. ▲

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка

с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\, x(t) = 0$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0,$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0, \qquad \lambda = q,$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1,\qquad \lambda_1 = 2,\qquad$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1,\qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\,2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0,\qquad \lambda = q,\qquad$ ФСР: $\varphi_1(t) = q^t,$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1,\qquad \lambda_1 = 2,\qquad$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1,\qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0,\qquad \lambda = q,\qquad$ ФСР: $\varphi_1(t) = q^t,$

Общее решение: $\qquad x(t) = C\,q^t.$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1,\qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1,\qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\quad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0,\qquad \lambda = q,$ ФСР: $\varphi_1(t) = q^t,$

Общее решение: $\quad x(t) = C\,q^t.$

Начальное условие $\; x(1) = a_1,\;$ тогда $\; a_1 = C\,q,\qquad C = \dfrac{a_1}{q}.$

Пример. $$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

это линейное однородное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_1 = 2,$ ФСР: $\varphi_1(t) = 1^t \equiv 1, \qquad \varphi_2(t) = 2^{\,t},$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 + C_2\, 2^{\,t}.$

Пример. Геометрическая прогрессия $x(t+1) - q\,x(t) = 0$

$\lambda - q = 0, \qquad \lambda = q, \qquad$ ФСР: $\varphi_1(t) = q^t,$

Общее решение: $\qquad x(t) = C\,q^t.$

Начальное условие $\; x(1) = a_1, \;$ тогда $\; a_1 = C\,q, \qquad C = \dfrac{a_1}{q}.$

Формула общего члена геометрической прогрессии: $\qquad x(t) = a_1\,q^{t-1}.$

Пример. $x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0$

Пример. $$x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Пример. $x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i,$

Пример. $x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \qquad r = \sqrt{2}, \qquad \omega = \frac{3}{4}\pi$$

Пример. $x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \qquad r = \sqrt{2}, \qquad \omega = \dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t) = (\sqrt{2})^t \cos\dfrac{3}{4}\pi\, t, \qquad \varphi_2(t) = (\sqrt{2})^t \sin\dfrac{3}{4}\pi\, t,$

Пример. $x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \qquad r = \sqrt{2}, \qquad \omega = \dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t) = (\sqrt{2})^t \cos \dfrac{3}{4}\pi\, t, \qquad \varphi_2(t) = (\sqrt{2})^t \sin \dfrac{3}{4}\pi\, t,$

общее решение $x(t) = C_1\, (\sqrt{2})^t \cos \dfrac{3}{4}\pi\, t + C_2\, (\sqrt{2})^t \sin \dfrac{3}{4}\pi\, t.$

Пример. $x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0$

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

$\lambda_{1,2}=-1\pm i,\qquad r=\sqrt{2},\qquad \omega=\dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t)=(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi\,t,\qquad \varphi_2(t)=(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi\,t,$

общее решение $x(t)=C_1\,(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi\,t+C_2\,(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi\,t.$

Пример. $x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0$

Пример. $$x(t+2) + 2x(t+1) + 2x(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \qquad r = \sqrt{2}, \qquad \omega = \dfrac{3}{4}\,\pi$

ФСР: $\varphi_1(t) = (\sqrt{2})^t \cos\dfrac{3}{4}\,\pi\,t, \qquad \varphi_2(t) = (\sqrt{2})^t \sin\dfrac{3}{4}\,\pi\,t,$

общее решение $$x(t) = C_1\,(\sqrt{2})^t \cos\frac{3}{4}\,\pi\,t + C_2\,(\sqrt{2})^t \sin\frac{3}{4}\,\pi\,t.$$

Пример. $$x(t+2) + 2x(t+1) + x(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Пример. $$x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

$\lambda_{1,2}=-1\pm i, \qquad r=\sqrt{2}, \qquad \omega=\dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t)=(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi\, t, \qquad \varphi_2(t)=(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi\, t,$

общее решение $\qquad x(t)=C_1\,(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi\, t+C_2\,(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi\, t.$

Пример. $$x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

$\lambda=-1$ кратности 2

Пример. $$x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

$\lambda_{1,2}=-1\pm i$, $\qquad r=\sqrt{2}$, $\qquad \omega=\dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t)=(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi\,t$, $\qquad \varphi_2(t)=(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi\,t$,

общее решение $$x(t)=C_1\,(\sqrt{2})^t\cos\frac{3}{4}\pi\,t+C_2\,(\sqrt{2})^t\sin\frac{3}{4}\pi\,t.$$

Пример. $$x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

$\lambda=-1$ кратности 2 $\qquad$ ФСР: $\varphi_1(t)=(-1)^t$, $\qquad \varphi_2(t)=t\,(-1)^t$,

Пример. $x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0$

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

$\lambda_{1,2}=-1\pm i,\qquad r=\sqrt{2},\qquad \omega=\dfrac{3}{4}\pi$

ФСР: $\varphi_1(t)=(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi t,\qquad \varphi_2(t)=(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi t,$

общее решение $\quad x(t)=C_1(\sqrt{2})^t\cos\dfrac{3}{4}\pi t+C_2(\sqrt{2})^t\sin\dfrac{3}{4}\pi t.$

Пример. $x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

$\lambda=-1$ кратности 2 ФСР: $\varphi_1(t)=(-1)^t,\qquad \varphi_2(t)=t(-1)^t,$

общее решение $\quad x(t)=C_1(-1)^t+C_2\,t(-1)^t.$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

общее решение $$x(t) = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

общее решение $$x(t) = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Система для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} x(1) = 1 = C_1 \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x(2) = 1 = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{cases}$$

Пример. Числа Фибоначчи

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \qquad x(1) = 1, \quad x(2) = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

общее решение $\qquad x(t) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$

Система для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} x(1) = 1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x(2) = 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Теорема (о построении частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида)

Если правая часть линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x(t+n) + a_1(t)\, x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\, x(t) = b(t)$$

имеет вид

$$b(t) = \rho^t \left(P(t)\cos\omega t + Q(t)\sin\omega t\right),$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены степени не больше m, то при $\omega \neq 0$ существует решение вида:

$$x_{\text{част}}(t) = t^k\, \rho^t \left(R(t)\cos\omega t + T(t)\sin\omega t\right),$$

где $R(t)$ и $T(t)$ — многочлены степени не больше m, а k — кратность корня $\lambda = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ в характеристическом уравнении (если такого корня нет, то $k = 0$).

При $\omega = 0$, т.е. при

$$b(t) = \rho^t P(t)$$

существует решение вида

$$x_{\text{част}}(t) = t^k \rho^t R(t),$$

где $R(t)$ — многочлен степени не больше m, а k — кратность корня (если такого корня нет, то $k = 0$). ▲

Пример. из Слойера

§5. Устойчивость положения равновесия разностного уравнения.

Решение $\varphi(t)$ разностного уравнения n-го порядка называется **устойчивым**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям

$$|\psi(1) - \varphi(1)| < \delta,$$
$$|\psi(2) - \varphi(2)| < \delta,$$
$$\ldots$$
$$|\psi(n) - \varphi(n)| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

при всех $t \in \mathbb{N}$.

Решение называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво, и дополнительно

$$\lim_{t\to\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Теорема (Критерий устойчивости решений линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами).

Все решения уравнения

$$x(t+n) + a_1(t)\,x(t+n-1) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = b(t)$$

независимо от $b(t)$:

1). асимптотически устойчивы, если

$$|\lambda| < 1$$

для всех корней λ характеристического уравнения;

2). устойчивы, но не асимптотически при

$$|\lambda| \leqslant 1$$

для всех корней, причем корни $|\lambda| = 1$ имеют кратность 1;

3). неустойчивы во всех остальных случаях. ▲

Теорема (Достаточное условие существования устойчивого положения равновесия нелинейного уравнения)

$$x(t+1) = V(x(t)).$$

Если функция $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема k раз, где $k \geqslant 1$, и

$$|V'(x)| \leqslant q < 1$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, то уравнение $x(t+1) = V(x(t))$ имеет единственное положение равновесия

$$x^* = V(x^*),$$

причем

$$x^* = \lim_{t \to +\infty} x(t)$$

независимо от $x(0)$, и

$$|x(t) - x^*| < q^t |x(0) - x^*|. \qquad \blacktriangle$$