

## Занятие 2. Исчисление логики высказываний

Список аксиом:

- I.  $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$   
 $(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))$
- II.  $x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_1$   
 $x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_2$   
 $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2 \wedge x_3))$
- III.  $x_1 \rightarrow x_1 \vee x_2$   
 $x_2 \rightarrow x_1 \vee x_2$   
 $(x_1 \rightarrow x_3) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3))$
- IV.  $(x_1 \leftrightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$   
 $(x_1 \leftrightarrow x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$   
 $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_1 \leftrightarrow x_2))$
- V.  $x_1 \rightarrow \neg(\neg x_1)$   
 $\neg(\neg x_1) \rightarrow x_1$   
 $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1)$

1. Доказать, что следующие формулы являются формальными теоремами:

а)  $x_1 \vee x_2 \leftrightarrow x_2 \vee x_1$ ;      б)  $x_1 \rightarrow x_1 \wedge x_1$ .

2. Пусть  $p$  и  $q$  – произвольные формулы. Доказать, что  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  – формальная теорема.

3. Укажите такую формулу  $p$ , чтобы в приведённой последовательности формул третья формула получалась из двух первых по правилу МР.

а)  $(x_1 \rightarrow x_2), p, (x_3 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2))$ ;      б)  $(x_1 \rightarrow x_2), p, ((x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2))$ .

4. Используя теорему дедукции, докажите, что при любых формулах  $p, q, r$  следующие формулы являются формальными теоремами.

а)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ;      б)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ ;  
в)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ ;      г)  $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ .

### Домашнее задание

1. Доказать, что следующие формулы являются формальными теоремами:

а)  $x_1 \vee x_1 \rightarrow x_1$ ;      б)  $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2)$ ;      в)  $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1))$ .

2. Пусть  $p, q$  и  $r$  – произвольные формулы. Доказать, что

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

– формальная теорема.

3. Используя теорему дедукции, докажите, что при любых формулах  $p, q$  и  $r$  следующие формулы являются формальными теоремами.

а)  $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ ;      б)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .