

Занятие 2. Задача 4а)

1 способ. Сначала решение, использующее теорему дедукции.

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow$$

$$p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \Leftrightarrow$$

$$q \rightarrow r, p \rightarrow q \vdash p \rightarrow r \Leftrightarrow$$

$$p, q \rightarrow r, p \rightarrow q \vdash r$$

Теперь r вывести легко по МР: $\frac{p, p \rightarrow q}{q}$ и $\frac{q, q \rightarrow r}{r}$.

2 способ. А теперь напрямую. Это будет долго. Итак, приступим.

Введем обозначения.

$$X = x_1 \rightarrow x_2,$$

$$Y = x_2 \rightarrow x_3,$$

$$Z = x_1 \rightarrow x_3,$$

$$T = X \rightarrow Z,$$

$$S = x_1 \rightarrow Y,$$

$$U = Y \rightarrow X,$$

$$V = Y \rightarrow Z.$$

Выведем $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$, после чего останется применить 3 раза правило подстановки: p вместо x_1 , q вместо x_2 , r вместо x_3 .

$$\vdash X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$$

$$1. \text{ Акс. I.1 } (S \rightarrow T) \rightarrow (Y \rightarrow (S \rightarrow T))$$

$$2. \text{ Акс. I.2 } (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) = S \rightarrow T$$

$$3. \text{ МР(1,2): } Y \rightarrow (S \rightarrow T)$$

$$4. \text{ Акс. I.2 } (Y \rightarrow (S \rightarrow T)) \rightarrow ((Y \rightarrow S) \rightarrow (Y \rightarrow T))$$

$$5. \text{ МР(3,4): } (Y \rightarrow S) \rightarrow (Y \rightarrow T)$$

$$6. \text{ Акс. I.1 } Y \rightarrow (x_1 \rightarrow Y) = Y \rightarrow S$$

$$7. \text{ МР(5,6): } Y \rightarrow T$$

$$8. \text{ Акс. I.2 } (Y \rightarrow (X \rightarrow Z)) \rightarrow ((Y \rightarrow X) \rightarrow (Y \rightarrow Z)) = (Y \rightarrow T) \rightarrow (U \rightarrow V)$$

$$9. \text{ МР(7,8): } U \rightarrow V$$

$$10. \text{ Акс. I.1 } (U \rightarrow V) \rightarrow (X \rightarrow (U \rightarrow V))$$

$$11. \text{ МР(9,10): } X \rightarrow (U \rightarrow V)$$

$$12. \text{ Акс. I.2 } (X \rightarrow (U \rightarrow V)) \rightarrow ((X \rightarrow U) \rightarrow (X \rightarrow V))$$

$$13. \text{ МР(11,12): } (X \rightarrow U) \rightarrow (X \rightarrow V)$$

$$14. \text{ Акс. I.1 } X \rightarrow (Y \rightarrow X) = X \rightarrow U$$

$$15. \text{ МР(13,14): } X \rightarrow V = X \rightarrow (Y \rightarrow Z).$$