Занятие 4. Предикаты. Понятие логики 1-го порядка (остатки)

1. На множестве натуральных чисел рассматривается предикат $S(x, y, z)$: число z равно сумме чисел x и y. Какое отношение описывает приведенный ниже предикат?

$$\exists u \forall v (S(x, y, u) \to \neg S(u, v, z))$$

2. Дана формула $F = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P_1^2 x_1 x_2 \wedge P_1^2 x_2 x_3 \to P_1^2 x_1 x_3)$.

а) Имеется ли бесконечная модель, в которой эта формула истинна?

б) Имеется ли модель, в которой эта формула выполнима, но не истинна?

в) Имеется ли модель, в которой эта формула противоречие?

3. Доказать, что формула

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P_1^2 x_1 x_2 \to (P_1^2 x_2 x_3 \to P_1^2 x_1 x_3)) \wedge \forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 x_2 \wedge \forall x_1 \forall x_2 (P_1^2 x_1 x_2 \to \neg P_1^2 x_2 x_1)$

выполнима, но не выполнима ни в какой конечной модели.

Комментарии

1. $z \le x + y$.
2. а) да (это транзитивность), например, на множестве натуральных чисел P_1^2 соответствует $\le$.

б) нет (нет свободных переменных)

в) да, например, на множестве всех прямых на плоскости P_1^2 соответствует $\perp$.

Занятие 5. Равносильность предикатов. Нормальные формы

Пусть F и G – произвольные формулы. Определите, равносильны ли следующие формулы:

а) $\forall x_i (F \vee G)$ и $\forall x_i F \vee \forall x_i G$;

б) $\exists x_i (F \to G)$ и $\forall x_i F \to \exists x_i G$;

в) $\exists x_i F \to \exists x_j G$ и $\forall x_i \exists x_j (F \to G)$;

г) $\exists x_i (F \leftrightarrow G)$ и $\exists x_i F \leftrightarrow \exists x_i G$.

Комментарии

Ответы: а) нет (например, на множестве натуральных чисел $F =$ "x_i – четное", $G =$ "x_i – нечетное"); б) да; в) нет (например, на множестве действительных чисел $F =$ "$x_j > 0$", $G =$ "$x_j^2 < 0$", тогда формулы примут вид $\exists x_i (x_j > 0) \to \exists x_j (x_j^2 < 0)$ и $\forall x_i \exists x_j (x_j > 0 \to x_j^2 < 0)$, тогда вторая формула ложна, а первая может быть как истинной, так и ложной, в зависимости от x_j).

Домашнее задание

1. Пусть F и G – произвольные формулы.

1.1. Сделайте задание под пунктом г) из Занятия 5.

1.2. Определите, равносильны ли следующие формулы:

а) $\exists x_i (F \wedge G)$ и $\exists x_i F \wedge \exists x_i G$;

б) $\forall x_i (F \to G)$ и $\exists x_i F \to \forall x_i G$;

в) $\exists x_i F \vee \exists x_j G$ и $\exists x_i \exists x_j (F \vee G)$;

г) $\forall x_i (F \leftrightarrow G)$ и $\forall x_i F \leftrightarrow \forall x_i G$.

2. Дана формула $F = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 P_1^2 f_1^2 f_1^2 x_1 x_2 x_3 f_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_3$.

а) Имеется ли бесконечная модель, в которой эта формула истинна?

б) Имеется ли бесконечная модель, в которой эта формула выполнима, но не истинна?

в) Имеется ли модель, в которой эта формула противоречие?

3. Докажите, что формула

$$\exists x_1 \forall x_2 (P_1^2 x_1 x_2 \to (\neg P_1^2 x_2 x_1 \to (P_1^2 x_1 x_1 \leftrightarrow P_1^2 x_2 x_2)))$$

истинна в любой не более чем трехэлементной модели. Постройте четырехэлементную модель, в которой эта формула ложна.

4. Докажите, что формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (\neg P_1^2 x_1 x_1 \wedge (P_1^2 x_1 x_2 \wedge P_1^2 x_2 x_3 \to P_1^2 x_1 x_3)) \wedge \forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 x_2$$

выполнима, но не выполнима ни в какой конечной модели.