

Занятие 8. Нормальные формы

1. Привести следующие формулы к предваренной нормальной форме:

а) $\exists x_1 P_1^2 x_1 x_2 \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 x_2$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_1 \wedge \exists x_1 P_1^2 x_1 x_2 \wedge (\forall x_2 P_1^2 x_1 x_2 \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 P_1^2 f_1^2 x_1 x_2 x_2)$.

2. Для каждой из приведенных ниже формул напишите формулу в сколемовой нормальной форме, выполняемую в том и только том случае, когда выполняема исходная формула.

а) $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall x_6 \exists x_7 \forall x_8 P_1^3 x_1 f_1^3 x_2 x_1 x_4 f_2^3 x_3 f_3^3 x_5 x_6 x_4 f_1^2 x_7 x_8$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_1 \wedge \exists x_1 P_1^2 x_1 x_2 \wedge (\forall x_2 P_1^2 x_1 x_2 \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 P_1^2 f_1^2 x_1 x_2 x_2)$.

3. Некоторые студенты второго курса помнят определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a :

$$\forall \varepsilon (0 < \varepsilon \rightarrow \exists \delta (0 < \delta \rightarrow \forall x (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)).$$

а) На языке логики 1-го порядка напишите формулу, интерпретация которой в соответствующей алгебраической системе даёт приведённое выше определение непрерывности.

б) Полученную формулу приведите к предваренной нормальной форме.

в) Напишите формулу в сколемовой нормальной форме, выполняемую тогда и только тогда, когда выполняема построенная вами формула.

4. Дана формула $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (P_1^2 x_3 x_1 \ \& \ P_1^2 x_3 x_2)$.

а) Выполнима ли эта формула?

б) Имеется ли модель, в которой эта формула невыполнима?

в) Пусть носителем модели является множество открытых кругов на плоскости, предикатный символ интерпретируется как отношение теоретико-множественного включения. Какое утверждение является интерпретацией указанной формулы? Является ли оно истинным?

г) Постройте формулу в сколемовой нормальной форме, выполняемую тогда и только тогда, когда выполняема исходная формула.

5. Пусть подстановка $\sigma = \{x_1 | f_1^1 x_3, x_2 | f_1^2 x_1 x_2, x_3 | f_1^0\}$.

а) Найти результат F^σ и $(F^\sigma)^\sigma$, если $F = P_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_3 \wedge P_1^2 x_1 x_2$

б) Вычислить σ^2 .

6. Каковы подстановки σ и τ , если $\sigma \circ \tau = \varepsilon$?

7. Пусть подстановки $\sigma = \{x_1 | f_1^1 x_3, x_2 | f_1^2 x_4 x_2, x_3 | f_1^0, x_4 | x_1\}$ и $\tau = \{x_1 | x_4, x_2 | x_1, x_3 | f_1^1 x_4, x_4 | x_3\}$. Вычислить $\sigma \circ \tau$ и $\tau \circ \sigma$.

8. Отличаются ли подстановки

$$\{x_{i_1} | t_1, x_{i_2} | t_2, \dots, x_{i_n} | t_n\} \text{ и } \{x_{i_1} | t_1\} \circ \{x_{i_2} | t_2\} \circ \dots \circ \{x_{i_n} | t_n\}?$$

Если не отличаются, то доказать это, в противном случае привести пример, аргументирующий их различие.

Домашнее задание

1. а) Вспомните задачу. Даны формулы: $\exists x_1 \exists x_2 (P_1^1 x_1 \wedge P_2^1 x_2 \wedge P_1^2 x_1 x_2)$ и $\neg \exists x_1 \exists x_2 (P_1^1 x_1 \wedge P_3^1 x_2 \wedge P_1^2 x_1 x_2)$. Выясните, какие из ниже приведённых формул являются логическими следствиями этой совокупности формул:

1) $\forall x_1 (P_2^1 x_1 \rightarrow \neg P_3^1 x_1)$;

2) $\exists x_1 (P_2^1 x_1 \wedge \neg P_3^1 x_1)$;

3) $\exists x_1 (P_2^1 x_1 \wedge P_3^1 x_1)$.

б) Вот два утверждения: «Среди первокурсников есть такие, которые знакомы с некоторыми второкурсниками» и «Ни один первокурсник не знаком ни с одним волонтером чемпионата мира по футболу 2018». Постройте такую модель, чтобы эти утверждения стали интерпретацией формул пункта а) и на основании результатов выполнения пункта а) определите, какие из следующих утверждений гарантированно являются логическими следствиями:

1) «Ни какой второкурсник не является волонтером чемпионата мира по футболу 2018»;

2) «Некоторые второкурсники не являются волонтерами чемпионата мира по футболу 2018»;

3) «Есть хотя бы один второкурсник, который является волонтером чемпионата мира по футболу 2018».

в) Сколько второкурсников должно остаться после отчисления по результатам зимней сессии, чтобы в получившейся модели утверждение 1) из пункта б) было логическим следствием исходных утверждений?

г) Существует ли модель, в которой утверждение 3) из пункта а) является логическим следствием исходных утверждений?

Ответы: 1. а) только 2-я, б) 2, в) сколько угодно, лишь бы отчислили всех знакомых с первокурсниками, г) да, например, выберем носитель $M = \{1, 2\}$, положим

$$P_1^1(x) = P_2^1(x) = 1 \text{ при любом } x, P_3^1(x) = 1 \text{ при } x = 1, P_1^2(x, y) = 1 \text{ при } x = 1 \text{ и } y = 2.$$

2. Привести следующие формулы к предваренной нормальной форме:

а) $\forall x_1 P_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_1 \rightarrow \exists x_1 (P_1^2 x_2 x_1 \vee \forall x_3 (P_1^1 x_3 \rightarrow P_1^2 f_1^2 x_1 x_3 x_1))$.

б) $\neg \forall x_1 \exists x_3 (P_1^2 x_1 f_1^2 x_2 x_1 \rightarrow \forall x_2 (P_2^2 x_1 x_2 \wedge P_2^2 x_2 x_3 \wedge P_1^1 f_1^2 x_1 x_3))$.

3. Для каждой из приведенных формул, приведенных в задании 2, напишите формулу в сколемовой нормальной форме, выполнимую в том и только том случае, когда выполняема исходная формула.

4. Дана формула $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (P_1^2 x_3 x_1 \ \& \ P_1^2 x_3 x_2 \ \& \ \forall x_4 (P_1^2 x_4 x_1 \ \& \ P_1^2 x_4 x_2 \rightarrow P_1^2 x_4 x_3))$. Выполните для нее все пункты задания 4 из классной работы.