

### Вариант 1

1. Имеются высказывания некоторого человека: «Если исход скачек будет предрешён сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Полиция никогда не бывает довольна». Является ли высказывание «Исход скачек не предрешён сговором» логическим следствием остальных его высказываний?
2. Следователь допрашивает трех свидетелей – Труса, Балбеса и Бывалого. Трус утверждает, что Балбес лжёт, Балбес обвиняет во лжи Бывалого, а Бывалый уговаривает следователя не верить ни Трусу, ни Балбесу. Следователь, не задав ни одного вопроса, понял, кто из свидетелей говорит правду. Как это можно сделать и кто говорит правду?
3. На множестве натуральных чисел имеются предикаты  $P(x, y) =$  “наибольший общий делитель  $x$  и  $y$  равен 1” и  $Q(x, y) = “x = y”$ . Используя эти предикаты, связки и кванторы, запишите следующий предикат:  $Prime(a) =$  “ $a$  - простое”.
4. Докажите, что для произвольных формул  $p, r$  формальной теоремой является формула

$$p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg(p \rightarrow r)).$$

### Вариант 2

1. Имеются высказывания некоторого человека: «Если исход скачек будет предрешён сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Полиция никогда не бывает довольна». Является ли высказывание «Исход скачек не предрешён сговором» логическим следствием остальных его высказываний?
2. Из шести кладоискателей-одиночек двое нашли клад. Опрашивая свидетелей, налоговый инспектор на вопрос «Кто нашёл клад»? Получил следующие ответы: «1-й и 3-й», «2-й и 6-й», «2-й и 5-й», «1-й и 4-й», «1-й и 6-й». Известно, что в четырёх из пяти ответов правильно указан один из счастливых, а в одном ответе оба указаны неверно. Кто нашёл клад?
3. На множестве натуральных чисел имеются предикаты  $P(x, y) =$  “наибольший общий делитель  $x$  и  $y$  равен 1” и  $Q(x, y) = “x = y”$ . Используя эти предикаты, связки и кванторы, запишите следующий предикат:  $Comp(a) =$  “ $a$  - составное”.
4. Докажите, что для произвольных формул  $p, r$  формальной теоремой является формула

$$\neg(p \rightarrow r) \rightarrow \neg r.$$

### Вариант 3

1. Записать формально следующее рассуждение на языке логики высказываний и выяснить, является ли оно тавтологией. Бродячий кот будет спать в подвале или добудет пропитание на улице. Если кот добывает еду, он ест или у него отбирают еду более свирепые коты. Кот не выпался и голоден. Из всего выше сказанного следует, что у кота отбирают еду, когда он голоден.
2. Доказать равносильность формул  $F$  и  $G$  без построения таблиц истинности:

$$F = x \rightarrow y \rightarrow z, \quad G = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z).$$

3. На множестве  $\mathbb{R}$  заданы двуместные предикаты  $P$  и  $Q$ :

$$P(x, y) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4, \quad Q(x, y) = 1 \Leftrightarrow x + y > 2.$$

Найдите множество всех  $y \in \mathbb{R}$ , для которых  $S(y) = 1$ , где  $S(y) = \exists x(P(x, y) \wedge Q(x, y))$ .

4. Докажите, что для произвольных формул  $p, r$  формальной теоремой является формула

$$\neg(p \rightarrow \neg r) \rightarrow r.$$