# Теория вероятностей. Лекция первая
# О вероятности наивно

Дмитрий Валерьевич Хлопин
*glukanat@mail.ru*

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

04.09.2018

## Некоторый списочек литературы:

доходчивый Чернова Н.И. Теория вероятностей. Новосибирск, 2007

парашютистам Босс В. Том 4. Вероятность. Информация. Статистика.

олдскул Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей

The Best Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (2т)

спелеологам Ширяев А.Н. Вероятность (2т)

альпинистам Синай Я.Г., Коралов Л.Б. Теория вероятностей и случайные процессы

от практики Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах (3т)

гробы от МФТИ Стохастический анализ в задачах. Ч. I

гробы от МГУ Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей

для интуиции Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике

*Цель курса*:
разобраться в основных понятиях теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

*Задача первого семестра*:
понятия "вероятностное пространство", "случайная величина", "(условное) математическое ожидание".

Первое из них — вероятностное пространство.

# Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Наивный взгляд

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть пока

$\Omega$ — множество элементарных событий (исходов), некоторое непустое множество;

$\mathcal{F}$ — пока не уточняем, что это такое;

$\mathbb{P}$ — вероятность.

**Пример 1.** ("правильная монета") Подбрасываем монетку; $\Omega = \{O, P\}$. Вероятности орла и решки по $1/2$.

**Пример 2.** ("правильный кубик") Подбрасываем кубик; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вероятности всех исходов по $1/6$.

**Уточняем**: наверное, $\mathbb{P}$ — функция из $\Omega$ в $\mathbb{R}$.

# 1-й наивный способ задания вероятности

Пусть множество $\Omega$ конечно, его мощность $|\Omega| = n$. Будем считать, что все исходы равновероятны. Тогда для всякого $\omega \in \Omega$ зададим

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}.$$

**Пример 3.** $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $|\Omega| = 11$. $\mathbb{P}(2) = 1/11$.

**Пример 4.** ("кубики") Подбрасываем два кубика. Найти вероятность того, что сумма равна $2$.

**Пример 5.** ("правильные кубики") Подбрасываем два кубика. Найти вероятность того, что сумма равна $7$.

**Уточняем**: вероятность нужна не только для элементарных исходов.

## Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Что хочется?

$\mathbb{P}$ — функция из множества $2^{\Omega}$ всевозможных подмножеств множества $\Omega$ в $\mathbb{R}$.

Назовем эти подмножества событиями. Например,
$\Omega$ — достоверное событие, $\varnothing$ — невозможное событие.
$\mathbb{P}(A)$ — вероятность того, что произошло событие $A$.

Свойства:

- Хочу0 $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- Хочу1 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Хочу2 Из $A \subset B$ следует $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Все хотелки выполнены, например, в...

# Определение классической вероятности

Эксперимент удовлетворяет классическому определению вероятности, если $\Omega$ состоит из конечного числа равновозможных исходов, а вероятность события $A$ задается как отношение числа исходов в событии $A$ к общему числу исходов:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \forall A \in 2^{\Omega}.$$

**Пример 6.** Достаем наудачу одно домино. Найти вероятность того, что число точек на этом домино равно $7$.

# Почему классики не хватает...

**Пример 7.** Палку случайно разломили на два куска. Найдите вероятность того, что каждый из кусков не больше другого.

**Пример 8.** Перед Вами отрезок, Вы выбрали случайно точку на нем, но никому не показали. С какой вероятностью Ваш сосед угадает эту точку?

# 2й наивный способ задания вероятности

Пусть $\Omega$ — область в плоскости, а $A$ — её непустая подобласть. Назовем вероятностью события $A$ отношение площадей: $\mathbb{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$.

**Пример 9.** В окружности случайно провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина больше стороны вписанного в окружность равностороннего треугольника.

# Банальная задача: парадокс Бертрана I

**Пример 9.** В окружности случайно провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина больше стороны вписанного в окружность равностороннего треугольника.

Решений у парадокса Бертрана много. Например...

**Решение 1**. Хорду восстановим по ее середине. Середина — произольная точка на круге. $\Omega$ — большой круг. Вписанный в треугольник круг — в точности то, что требуется. Поскольку их радиусы — части одной медианы, точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $1$ к $2$, то отношение площадей кругов равно $(1/2)^2$.
Ответ: $1/4$.

# Банальная задача: парадокс Бертрана II

**Решение 2**. Вместо хорды рассматриваем её середину. Середину понимаем как случайно взятые точку на окружности $S^1$ и точку на радиусе, проведенном к первой точке. Теперь $\Omega = [0,1] \times S^1$. Годятся точки, до которых от центра расстояние меньше половины радиуса (точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $1$ к $2$).
Ответ: $1/2$.
**Решение 3**. Вместо хорды выбираем ее концы (или точку и центральный угол, по часовой, от нее). Получаем $\Omega = S^1 \times S^1$ или $\Omega = [0, 2\pi] \times S^1$ соответственно. Выбор первой точки вероятность не меняет, второй выбор нас устраивает в трети случаев.
Ответ: $1/3$.
**Решение 4**. Вместо хорды рассматриваем точку и длину хорды. $\Omega = S^1 \times [0,2]$. От точки ничего не зависит. Нужна длина не меньше длины стороны вписанного треугольника.
Ответ: $1 - \sqrt{3}/2$.

# Геометрическая вероятность

Эксперимент удовлетворяет геометрическому определению вероятности, если все исходы можно изобразить в виде некоторой области $\Omega$ конечномерного пространства, а вероятность подмножества зависит только от меры (длины, площади, объема, ... $n$-мерного объема) этого подмножества и задается по формуле

$$\mathbb{P}(A) = \frac{meas(A)}{meas(\Omega)}.$$

Но как определить что такое область? Какой именно взять объем? Что такое "изобразить"? Что такое "не зависит от формы и расположения"?... А если $\Omega$ — фрактал, например? Или еще проще — прямая?

Подумать как задать меру на прямой

# Пара геометрических задачек на вырост

**Задача** (от 0.7 баллов). [охватить сосну]
На миллиметровку бросают сосновую иголку длиной $1$ см. Найдите среднее число пересечений с линиями сетки (да, сосновая иголка прямой быть не обязана).

**Задача** (от 0.7 баллов). [о круглых кирпичах]
Летит кирпич размером $3 \times 4 \times 5$. И так волшебно вращается, что все его положения относительно своего центра масс равновероятны. Солнце в зените, найдите среднюю площадь тени.

# Биномиальная схема независимых испытаний Бернулли I

Пусть элементарное событие — последовательность из нулей и единиц, результат последовательности испытаний, в каждом из которых вероятности успеха и неуспеха не меняются: вероятность успеха равна $p \in (0,1)$, неуспеха — $q = 1 - p$. Пусть число испытаний конечно, $n$. Тогда

$$\Omega_n = \{\text{конечные строки из нулей и единиц длины } n\} \cong 2^n, \ \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}.$$

При $p = q = 1/2$ вероятность каждой конечной строки равна $2^{-n}$, все исходы равновероятны.
А при $n = 12$ и произвольных $p, q$ $(p + q = 1)$ вероятность конечной строки $\mathbb{P}\{``100111110001''\}$ равна $p^7 q^5$.

В общем случае, в схеме Бернулли вероятность элементарного исхода задается следующим образом:

$$\mathbb{P}\{\text{данная строка}\} = p^{\text{число успехов в строке}} q^{\text{число неуспехов в строке}}.$$

Подумать: Почему именно так?

# Биномиальная схема независимых испытаний Бернулли II

Пусть

$$\Omega_n = \{\text{конечные строки из нулей и единиц длины } n\} \qquad \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n};$$
$$\mathbb{P}\{\omega\} = p^{\text{число успехов в строке}} q^{\text{число неуспехов в строке}} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

При этом оказывается, что $\mathbb{P}\{\text{число успехов ровно } k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Подумать: Почему именно так? Как распространить $\mathbb{P}$ на всё $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$?
Подумать: Можем ли мы сузить $\Omega_n$, рассматривая меньшее множество исходов? Например, только первый? Или только второй? Или первый и второй вместе? А объединить? А что при этом будет происходить с $\mathcal{F}_n$ и $\mathbb{P}$?
Подумать: Можем ли мы считать, что число испытаний бесконечно, а то, что мы знаем лишь первые $n$, — временное явление?

# Итог лекции:

Пока вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

$\Omega$ — множество элементарных событий (исходов), некоторое непустое множество;

$\mathcal{F}$ — множество событий, равное $2^{\Omega}$ (наивные...);

$\mathbb{P}$ — вероятность, монотонная функция $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, т.е.

$$0 = \mathbb{P}(\varnothing) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1 \qquad \forall A, B \in \mathcal{F}, A \subset B.$$

Подумать: задать какую-нибудь вероятность на прямой (как на $\Omega$), ну или например на множестве натуральных чисел. А вот еще бы равномерную выдумать...

Подумать: сколько нулей надо сложить, чтобы получить единицу?