Теория вероятностей. Лекция четвертая
Независимость и марковость

Дмитрий Валерьевич Хлопин
glukanat@mail.ru

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского

25.09.2018

Напомним:

Задача теории вероятностей — рассчитать вероятность сложных событий. Как?

При выполненной гипотезе — условная вероятность;

объединение по гипотезам — формула полной вероятности;

вероятность *a posteriori* — формула Байеса.

Вывод. Подалгебры только затем учить надо, что они вероятность в соответствие имеющейся информации приводят.

Замечание в минус. Пока всё это работает только для конечного числа гипотез, ненулевой вероятности каждая.
Замечание в плюс. Строить σ-алгебру не требуется, достаточно ввести вероятность на полукольце.

Напомним: умножение σ-алгебр

Даны Ω', Ω'' и их σ-алгебры $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$; рассмотрим следующую σ-алгебру над $\Omega' \times \Omega''$:

$$\mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'' \triangleq \sigma\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}''\}.$$

Подумать: как ввести вероятность $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}''$, если известны вероятности $\mathbb{P}_1 : \mathcal{F}' \to [0,1]$, $\mathbb{P}_2 : \mathcal{F}'' \to [0,1]$?

Требуем:

$$\mathbb{P}(A \times \Omega'') = \mathbb{P}_1(A) \text{ для каждого } A \in \mathcal{F}',$$
$$\mathbb{P}(\Omega' \times B) = \mathbb{P}_2(B) \text{ для каждого } B \in \mathcal{F}''.$$

Факт: Такие вероятности задать можно, но при этом уже $\mathbb{P}(A \times B)$ не восстанавливается однозначно.

Нужна дополнительная информация...

Способ первый: независимость событий

Житейское определение: "знание того, произошло B или не произошло, не влияет на вероятность события A".

Определение — A и B независимы, если $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ — не вполне корректно.

События $A, B \in \mathcal{F}$ называют **независимыми**, если

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Независимость большего числа событий

События $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называют попарно независимыми, если для любых различных $\alpha,\beta\in\mathfrak{A}$ события A_α, A_β независимы.
События $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ называют независимыми в совокупности, если для всякого конечного набора $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathfrak{A}$ выполнено
$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{\alpha_i})$.

Это разные определения!
Пример 1. (Бернштейн) Грани тетраэдра раскрашены в серый, бурый, малиновый цвета, а последняя — в серо-буро-малиновую полосочку. Все грани считаем равновероятными. События С,Б,М — на выпавшей грани имеется серый, бурый, малиновый цвет соответственно. Тогда все эти события попарно независимы, но не независимы в совокупности.
Подумать: а если взять счетное пересечение вместо конечного?

Независимость. Простейшие свойства [с-но]

1^o $\varnothing$ и Ω независимы с любым событием A;

2^o если A, B независимы и $A \cap B = \varnothing$, то или $\mathbb{P}(A)$, или $\mathbb{P}(B)$ равно нулю;

3^o если A, B независимы, то $\bar{A}, B$ независимы, $A, \bar{B}$ независимы, $\bar{A}, \bar{B}$ независимы;

4^o если A, B_1 независимы, A, B_2 независимы и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, то A и $B_1 \cup B_2$ также независимы;

5^o если A, B_i независимы для любого натурального i, а события B_i попарно не пересекаются, то A и $\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ также независимы;

6^o [С-но; 1 балл] Если A, B_i независимы для любого натурального i, и независимы в совокупности $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ..., $A \cap B_k$, ..., то для любого $B \in \sigma\{B_1, \dots, B_k, \dots\}$ множества A и B также независимы.

Независимость σ-алгебр

Конечный набор σ-подалгебр $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ **независим**, если любой конечный набор множеств A_i $(A_i \in \mathcal{F}_i)$ независим;
σ-подалгебры $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ **независимы**, если любой их конечный набор независим.

Пример 2. Тривиальная σ-алгебра $\{\varnothing, \Omega\}$ независима с любой другой подалгеброй алгебры $\mathcal{F}$.
Факт. Свойство независимости наследуется: независимость сохраняется при переходе от независимой алгебры к некоторой ее подалгебре.
Подумать: более общее определение независимости σ-подалгебр $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ — потребовать $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{F}_j) = \mathbb{P}(\cdot)$ на $\mathcal{F}_i$ для всех различных i, j.
Подумать: а как задать независимость "функций"?

Умножение независимых σ-алгебр

Даны Ω', Ω'' и их σ-алгебры $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$; рассмотрим следующую σ-алгебру над $\Omega' \times \Omega''$:

$$\mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}'' \triangleq \sigma\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}''\}.$$

Вопрос: как ввести вероятность $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}''$, если известны вероятности $\mathbb{P}_1 : \mathcal{F}' \to [0,1]$, $\mathbb{P}_2 : \mathcal{F}'' \to [0,1]$?

Недостаточно потребовать:

$$\mathbb{P}(A \times \Omega'') = \mathbb{P}_1(A) \text{ для каждого } A \in \mathcal{F}',$$
$$\mathbb{P}(\Omega' \times B) = \mathbb{P}_2(B) \text{ для каждого } B \in \mathcal{F}''.$$

[С-но; 1 балл] Докажите, что дополнительное требование — σ-алгебры $\mathcal{F}' \otimes \{\Omega''\}$ и $\{\Omega'\} \otimes \mathcal{F}'$ независимы — восстанавливает вероятность $\mathbb{P}$ однозначно.

Умножение счетного числа независимых σ-алгебр

Дано счетное число вероятностных пространств $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}_k)$.
Пространство элементарных исходов их произведения:

$$\bar{\Omega} \triangleq \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k \times \dots;$$

σ-алгебра для него строится так:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_k &\triangleq \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1} \times A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots \,|\, A \in \mathcal{F}_k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}; \\ \bar{\mathcal{F}} &\triangleq \sigma\Big(\cup_{k\in\mathbb{N}} \bar{\mathcal{F}}_k\Big). \end{aligned}$$

Для однозначного задания вероятности $\mathbb{P}$ достаточно определить вероятность на σ-алгебрах $\bar{\mathcal{F}}_k$:

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1} \times A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots) = \mathbb{P}_k(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F}_k$$

и потребовать независимость этих σ-алгебр.
Подумать: почему достаточно? [1 балл]

Снова независимые испытания Бернулли

Пространство состояний в одном испытании $\Omega \overset{\triangle}{=} \{\text{“успех”}, \text{“неудача”}\}$, вероятность успеха в одном испытании $\mathbb{P}(\text{“успех”}) = p$.
Пространство элементарных исходов счетного числа испытаний:

$$\bar{\Omega} \overset{\triangle}{=} \{X : \mathbb{N} \to \Omega\} = \Omega^{\mathbb{N}} = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times \ldots,$$

σ-алгебра для счетного числа испытаний:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}} &\overset{\triangle}{=} \sigma\{\Omega^k \times \{\text{“успех”}\} \times \bar{\Omega} \,|\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \\ &= \sigma\{\{X \in \bar{\Omega} \,|\, X_k = \text{“успех”}\} \,|\, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Важное предположение. Испытания независимы в совокупности, то есть

$$\mathbb{P}(X_i = \text{“успех”}) = p = \mathbb{P}(X_i = \text{“успех”} | X_{j_1} = \omega_{j_1}, X_{j_2} = \omega_{j_2}, \ldots, X_{j_k} = \omega_{j_k})$$

при любых различных $i, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$, всех $\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_k} \in \Omega$.
Теперь вероятность на $\bar{\mathcal{F}}$ однозначно восстанавливается требованием $\mathbb{P}(X_k = \text{“успех”}) = p$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Процессы с дискретным временем и конечным числом состояний

Пространство возможных состояний в каждый момент времени — некоторое конечное множество Ω. Определим

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega} &\triangleq \{X : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \Omega\} = \Omega^{\mathbb{N}\cup\{0\}} = \Omega\times\Omega\times\cdots\times\Omega\times\ldots, \\
\bar{\mathcal{F}} &\triangleq \sigma\{\Omega^k \times \{\omega\} \times \bar{\Omega} \,|\, \omega\in\Omega,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\} \\
&= \sigma\{\{X\in\bar{\Omega} \,|\, X_k=\omega\} \,|\, \omega\in\Omega,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}.
\end{aligned}$$

Конечно, можно задать вероятность правилом

$$\mathbb{P}(X_i=\omega_i) = p_i = \mathbb{P}(X_i=\omega_i | X_{j_1}=\omega_{j_1}, X_{j_2}=\omega_{j_2}, \ldots, X_{j_k}=\omega_{j_k}),$$

но можно интереснее.

Способ второй: марковское свойство

Житейское определение: "будущее X_{k+1} не зависит от прошлого $X_0, \dots, X_{k-1}$ при фиксированном настоящем X_k".

Марковское свойство

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{k+1}=\omega_{k+1} | X_k=\omega_k) = \\ = \quad &\mathbb{P}\big(X_{k+1}=\omega_{k+1} \big| X_k=\omega_k, X_{k-1}=\omega_{k-1}, \dots, X_0=\omega_0\big) \end{aligned}$$

для любых $k \in \mathbb{N}, \omega_0, \dots, \omega_{k+1} \in \Omega$ таких, что условная вероятность в правой части равенства существует;
в общем случае, в терминах независимости "функций" X_i:

$$\mathbb{P}(X_{k+1}|X_k) \equiv \mathbb{P}\big(X_{k+1}\big|X_k, X_{k-1}, \dots, X_0\big) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Марковские цепи, I

Пространство возможных состояний $\Omega \triangleq \{1, \ldots, n\}$. Примем

$$\bar{\Omega} \triangleq \{X : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \Omega\} = \Omega^{\mathbb{N}\cup\{0\}} = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega \times \ldots,$$
$$\bar{\mathcal{F}} \triangleq \sigma\{\Omega^k \times \{\omega\} \times \bar{\Omega} \,|\, \omega \in \Omega, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Последовательность $(X_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ называется цепью Маркова, если

$$\mathbb{P}(X_k|X_{k-1}) = \mathbb{P}\big(X_k\big|X_{k-1}, \ldots, X_0\big) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Матрицы $Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})_{n\times n} \triangleq \big(\mathbb{P}(X_k = j|X_{k-1} = i)\big)_{n\times n}$, $k \in \mathbb{N}$, называют матрицами переходов (матрицами вероятностей переходов, матрицами переходных вероятностей).

Марковские цепи, II

Пространство возможных состояний: $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

Последовательность $(X_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ называется цепью Маркова, если

$$\mathbb{P}(X_k | X_{k-1}) = \mathbb{P}\big(X_k \big| X_{k-1}, \dots, X_0\big) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

при этом матрицы $Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})_{n \times n} \triangleq \big(\mathbb{P}(X_k = j | X_{k-1} = i)\big)_{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$, называют матрицами переходов.

Подумать: а какие свойства надо потребовать от матриц $Q^{(k)}$?
Подумать: что изменится, если число состояний будет счетно?
Подумать: вероятность находится неоднозначно. Требуется также знать начальное состояние (распределение).

Стохастические матрицы

Матрица $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ называется стохастической, если
1) все q_{ij} неотрицательны;
2) $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1$ для всех $i \in \Omega$.

Теорема 1. [С-но] Всякая матрица переходов $Q^{(k)}$ стохастическая, каждая последовательность стохастических матриц является последовательностью матриц переходов для некоторой марковской цепи.

Подумать: а почему складываем по строкам, а не по столбцам?
Подумать: почему произведение стохастических матриц снова стохастическая матрица?

Марковские цепи: как считать вероятности

Теорема 2. [С-но] В марковской цепи с матрицами переходов $Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})_{n\times n}$, для любых $k \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_k \in \Omega$, выполнено

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = a_1, X_0 = a_0) &= q_{a_0 a_1}^{(1)} \mathbb{P}(X_0 = a_0),\\
\mathbb{P}(X_k = a_k, \ldots, X_0 = a_0) &= q_{a_{k-1} a_k}^{(k)} \ldots q_{a_1 a_2}^{(2)} q_{a_0 a_1}^{(1)} \mathbb{P}(X_0 = a_0),\\
\mathbb{P}(X_1 = a_1) &= \sum_{i=1}^{n} q_{i a_1}^{(1)} \mathbb{P}(X_0 = i).
\end{aligned}$$

Строку μ назовем распределением, если ее элементы неотрицательны, а их сумма равна единице. Зададим распределения-строки $\mu_k \triangleq \big(\mathbb{P}(X_k = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_k = n)\big)$.

Теорема 3 (Колмогоров). [С-но] В марковской цепи с матрицами переходов $Q^{(k)}$

$$\mu_1 = \mu_0 Q^{(1)},\ \mu_k = \mu_{k-1} Q^{(k)},\ \mu_k = \mu_0 Q^{(1)} \ldots Q^{(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Подумать: что изменится, если число состояний будет счетно?

Стационарные марковские цепи

Цепь Маркова называется стационарной (однородной по времени), если $Q^{(k)} \equiv Q$, то есть если соответствующие условные вероятности не зависят от времени.

Подумать: нет ли в определении стационарной цепи Маркова взвешенного орграфа с петлями?

Следствие. [С-но] В стационарной марковской цепи с матрицей переходов $Q = (q_{ij})_{n\times n}$, для любых $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \Omega_n$, выполнено

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = a_1, X_0 = a_0) &= q_{a_0 a_1}\mathbb{P}(X_0 = a_0),\\
\mathbb{P}(X_n = a_n, \ldots, X_0 = a_0) &= q_{a_{n-1}a_n}\ldots q_{a_1 a_2} q_{a_0 a_1}\mathbb{P}(X_0 = a_0),\\
\mu_1 &= \mu_0 Q,\\
\mu_n &= \mu_0 Q^n.
\end{aligned}$$

1. Введите над $\mathbb{N}$ хотя бы полуалгебру Π, определите конечно-аддитивную функцию из Π в $\{0,1\}$, не являющуюся счетно-аддитивной. (верхний и нижний пределы Вам в помощь...).
2. Докажите или опровергните тождество $\mathbb{P}(A|H) + \mathbb{P}(\bar{A}|\bar{H}) = 1$
3. В схеме бесконечного числа независимых испытаний Бернулли пусть $f_k(\omega)$ — результат k-го испытания. Напишите отображение $f_k\#\mathbb{P}$.
4. Представьте независимые испытания Бернулли (с вероятностью успеха p) в виде марковской цепи, марковскую цепь можете описать в терминах матриц переходов или графа, как угодно.