Ликбез по ДМ. Классическая вероятность.

Базовый

1. В ящике лежит 100 флажков: красных, зелёных, жёлтых, синих. Какое наименьшее число флажков надо взять не глядя, чтобы среди них нашлось не менее 10 одноцветных?

   Решение: Если мы достанем 37 флажков, то по принципу Дирихле, флажка хотя бы одного цвета будет точно 10. ($9 * 4 = 36 < 37$)
   Ответ: 37

2. Найти коэффициент при x^{16} для $(1 + x^2)^{10}$.

   Решение: Замена $y = x^2$. Теперь нам надо найти коэффициент при y^8. Раскрыв перемножение получим 10 скобок: $(1+y)\dots(1+y)$. Чтобы получить y^8 нужно взять "y"из 8 скобок и "1"из 2х оставшихся. Это в точности число способов выбрать 8 элементов из 10: C_{10}^8.
   Ответ:C_{10}^8

3. Доказать формулу: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

   Решение: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k)!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{(k)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = C_n^k$

4. Доказать формулу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

   Решение: Задача сводится к тому, у нас есть k шариков и n цветов и нужно посчитать сколько способов назначить шарику цветов. Выстроим шарики в ряд и будем вставлять между ними перегородки. Если между шариками нет перегородки, то красим их в один цвет. Всего перегородок будет $n-1$ штука, так как цветов n (у краевых шаров перегородка только с одной стороны). Если 2 перегородки стоят рядом - то шариков какого-то цвета нет. Итого получили k шариков и $n-1$ перегородок или же $k+n-1$ мест в ряде, для которых нужно выбрать куда поставить перегородки, ведь шарики после этого поставятся единственным способом. Это и будет чисто сочетаний C_{n+k-1}^k

5. Сколькими способами можно составить хоровод из n девушек?

   Решение: Заметим, что можем расцепить хоровод в n местах и получить n разных последовательностей девушек длины n(все циклические сдвиги). Значит хороводов в n раз меньше, чем последовательностей длины n. Итого: $\frac{n!}{n}$
   Ответ:$(n-1)!$

6. Монета брошена 2 раза (3 раза, n раз). Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится орел.

   Решение: Пойдем от противного и найдем вероятность того, что ни один орел не появился: значит были только решки. Вероятность этого $\frac{1}{2^n}$. Тогда искомая вероятность $1 - \frac{1}{2^n}$
   Ответ:$1 - \frac{1}{2^n}$

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятность, что сумма выпавших очков равна 7 (9 очков, 12 очков).

   Решение: Всего вариантов выпадение 2х костей: 36. Хороших вариантов у нас 6: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3). Итого $\frac{1}{6}$ для 7. Для 9: $\frac{1}{9}$. Для 12: $\frac{1}{36}$

8. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

   Решение: Вариантов расставить книги: 40!. Вариантов расставить 3 томика Пушкина: C_{40}^3, так как порядок мы точно знаем. Вариантов расставить все книги кроме томиков Пушкина: 37!. Ответ: $\frac{C_{40}^3 37!}{40!}$

9. Партия продукции состоит из десяти изделий, среди которых два изделия дефектные. Какова вероятность того, что из пяти отобранных наугад и проверенных изделий:

   (a) ровно одно изделие дефектное;

   (b) ровно два изделия дефектные;

   (c) хотя бы одно изделие дефектное?

   Решение: (a)Выбрать хорошие делати: C_{10}^4, выбрать плохую деталь: C_2^1. Всего способов выбрать 5 деталей: C_{10}^5. Итого: $\frac{C_{10}^4 C_2^1}{C_{10}^5}$.
   (b) $\frac{C_{10}^3}{C_{10}^5}$
   (c) $\frac{C_{10}^4 C_2^1}{C_{10}^5} + \frac{C_{10}^3}{C_{10}^5}$

10. (Парадокс дней рождений) Найти вероятность того, что в классе из 23 человек, не менее двух учеников родились в один день. **Решение:** Пойдем от обратного и найдем вероятность того, что все в классе родились в разные дни. Рассмотрели одного ученика и закрепили его день рождения. Вероятность того, что 2ой ученик родился в другой день: $(1 - \frac{1}{365})$. Вероятность того, что 3ий ученик родился не с первым и не со вторым: $(1 - \frac{2}{365})$. Обобщая для n-ого: $(1 - \frac{n}{365})$. Все эти события

происходят одновременно, поэтому искомая вероятность:

$$P = \prod_{n=1}^{22}(1 - \frac{n}{365}) = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

При $n = 23$, $P = 0.5$.