1 Ликбез по ДМ. Классическая вероятность.

1.1 Дополнительный

1. (0.5б) Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 2017.

   Решение: Пусть a_n - число, состоящее из n единиц. По принципу Дирихле среди чисел, состоящих только из единиц, найдутся 2 таких, которые дают одинаковые остатки при делении на 2017. Вычтем из большего меньшее и получим число вида $a_r * 10^n$. Так как число 2017 - простое, 10^n не делится на 2017, значит a_r делится на 2017.

2. (0.5б) Найти коэффициент при x^{29} для $(1 + x^5 + x^7 + x^9)^{100}$.

   Решение: Возможные комбинации получение числа 29: $5 + 5 + 5 + 7 + 7 = 29$ и $9 + 5 + 5 + 5$. Значит при раскрытии степени нам надо взять степени x из либо трех скобок с "5 двух с "7"и 95 с "0"либо четырех скобок с "5 1 с "9"и 95 с "0". Это можно сделать с помощью полиномиального коэффициента для каждой из комбинаций:

$$\frac{100!}{3!2!95!} + \frac{100!}{4!1!95!}$$

   .

3. (0.5б) Доказать что:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$$

   Решение: Разделим $2n$ предметов на 2 группы по n. Очевидно, что чтобы выбрать n предметов, необходимо взять какое-то количество k из первой группы и $n - k$ из второй для всех возможных k. Тогда

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$$

5. (1б) Найти число циклических последовательностей длины 7 из 4 элементов.

   Решение: Обозначим за A - множество последовательностей, которые имеет 7 различных циклических сдвигов. Заметим, что при склейке каждой из последовтельностей получится множество размером $\frac{|A|}{7}$. Заметим, что множество A - это все последовтельности длины 7 из 4 элементов,кроме последовательностей, в которых все элементы одинаковые. Следовательно $|A| = 4^7 - 4$. Действительно,если какие-то два циклических сдвига последовательности равны, то последовательность имеет минимальный период отличный от 7. Так как минимальный период - число, которое делит все периоды, а 7 - период, то минимальный период может быть равен только 7 и 1. Случай с 7 мы рассмотрели, а случай с 1 - это 4 последовтельности, в которых все элементы одинаковые. Таких будет 4 последовательности. Таким образом получаем, что количество равно $\frac{4^7 4}{7} + 4$

6. (0.5б) Дать формулы вероятности P_n того, что среди тринадцати карт, извлеченных из 52 карт, n карт окажутся пиковой мастью.

   Решение: Количество способов взять n карт пиковой масти: C_{13}^{n}. Количество способов взять оставшиеся карты C_{52-13}^{13-n}. Всего комбинаций взять 13 карт: C_{52}^{13}. Итого: $\frac{C_{13}^{n} C_{52-13}^{13-n}}{C_{52}^{13}}$

7. (0.5б) В программе к экзамену по теории вероятностей 75 вопросов. Студент знает 50 из них. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент знает хотя бы два вопроса из вытянутого им билета.

   Решение: Количество способов взять билет с 3 известными вопросами: C_{50}^{3}. Количество способов взять билет с 2 известными вопросами и одним неизвестным: $C_{50}^{2} C_{25}^{1}$. Всего комбинаций билетов: C_{75}^{3}. Итого:

$$\frac{C_{50}^{3} + C_{50}^{2} C_{25}^{1}}{C_{75}^{3}}$$

8. (0.5б) У театральной кассы стоят в очереди $2n$ человек. Среди них n человек имеют лишь банкноты по 1000 рублей, а остальные — только банкноты по 500 рублей. Билет стоит 500 рублей. Каждый покупатель приобретает по одному билету. В начальный момент в кассе нет денег. Чему равна вероятность того, что никто не будет ждать сдачу?

   Решение: Количество способов распределить n купюр по 500 рублей по 2n людям - это C_{2n}^{n}. Посчитаем количество способов распределить купюры по 500 рублей так, чтобы на каждом префиксе купюр по 500 рублей было бы не меньше, чем по 1000. Эта задача эквивалентна задаче о количестве правильных скобочных последовательностей (левая скобка - посетители с 500, правая - с 1000). Как известно,количество ПСП длины n-это n-ое число Каталана $K_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$. Получаем,чтовероятность равна $\frac{1}{n+1}$

9. (1б) Как-то раз 3 ковбоя Хороший, Плохой и Злой не поделили девушку низкой социальной ответственности в одном кабаре и решили устроить дуэль. Хороший попадает в цель с вероятностью p_1, Плохой с вероятностью p_2, а Злой с вероятностью p_3. Каждый выбирает цель с наибольшей меткостью из оставшихся (суицид никто совершать не будет). Сначала стреляет Хороший, потом Плохой, потом Злой и потом опять Хороший и.т.д. Какова вероятность Хорошему парню выйграть дуэль и заполучить девушку.

Решение: Рассмотрим только случай ($p_1 > p_2 > p_3$), остальные аналогичные и чисто технические.
$q_i = 1 - p_i$ Есть 2 варианта: либо Хороший попал, либо мы прошли круг и все промазали и мы вернулись в исходную точку.

$$P_X = P_{branch} + q_1 q_2 q_3 P_X$$

P_{branch} - вероятность того, что Хороший попал и начинается перестрелка со Злым.

$$P_{branch} = (p_1+(1-p_3))+p_1+q_1q_3p_1+(q_1q_3)^2p_1+\ldots = (p_1+(1-p_3))+\frac{p_1}{1-q_1q_3}$$

Итог:

$$P_X = \frac{P_{branch}}{1-q_1q_2q_3} = \frac{(p_1+(1-p_3))(1-q_1q_3)+p_1}{(1-q_1q_3)(1-q_1q_2q_3)}$$

10. (0.5б)В ящике находится a белых и b черных шаров. Если достают черный шар, то его возвращают и кладут еще один черный шар. Если вытащен белый шар, то процесс прекращается. Определить вероятности того, что белый шар вытащили на четном и нечетном шаге.

    Решение: Нам нужно взять белый шар на нечетном шаге, значит на всех предыдущих шагах мы брали черные шары. Взять белый шар на $2k-1$ шаге равна:

    $$P(2k-1) = \left(\frac{a}{a+b+2k}\right) * \left(\frac{b}{a+b}\right) * \left(\frac{(b+2k-1)!(a+b)!}{b!(a+b+2k-1)!}\right)$$

    Первая скобка - взятие белого шара, третья и вторая - взятие черных шаров. Итого нужно посчитать вот такую сумму.

    $$\sum_{k=1}^{\infty} P(2k-1)$$

    Как это сокращать, я не знаю. Накину 3б тому, кто научится это делать.

    Для четных строится аналогичное страшное условие:)

    По сути нам не нужно доказывать сходимость, так как мы знаем, что это вероятность и она меньше 1, так как правил мы не нарушали. Но для особо занудных: рассмотрите эксперимент, в котором новые шары не добавляются. В этом случае вероятность взять белый шар не уменьшается, значит общая сумма будет строго больше рассматриваемой.

    $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(a+b)} * (\frac{b}{(a+b)})^{2k-1} = \frac{ab}{(a+b)^2} * \frac{1}{1-(\frac{b}{a+b})^2} = \frac{ab}{a^2+2ab} = \frac{b}{a+2b}$$