Классическая вероятность. Схема Бернулли.

Базовый

1. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить «цепочку» согласно правилам игры.

   Решение: Всего способов достать 2 доминошки: C_{28}^2. Нужно найти множество хороших пар: у которых есть общая цифра. Разобьем их на 2 множества: в котором есть один дубль и в котором нет дублей. Два дубля быть не может, значит мы не потеряли ни одной пары.
   В множестве, в котором есть дубли мы сначала берем один из 7 дублей и для каждого находим 6 подходящих доминошек с нужной цифрой. Итого: 7*6 хороших пар доминошек с дублями.
   В множестве, где нет дублей берем одну из оставшихся 21 доминошек и ищем к ней 10 соседей не дублей (по 5 для каждой цифры, потому что дубли уже убрали). Осталось поделить пополам, потому что все пары мы посчитали по 2 раза (пример: в начале взяли доминошку 1-2, потом 2-3 и наоборот, сначала 2-3, потом 1-2). Итог: $21 * 10/2 = 105$.
   Ответ: $105 + 42 = 147$.

2. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

   Решение: Всего перестановок кубиков 10!. Посчитаем в каких перестановках слова не меняются. Буквы "М "Т"и "А"можно менять между собой и получать исходное слово. Значит слово «МАТЕМАТИКА» можно получить 2!2!3! способами. Вероятность:

   $$\frac{2!2!3!}{10!}$$

   (перевернутый полиномиальный коэффициент).

3. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 м и попадает в него с вероятностью 0.5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150 м. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 м. Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния, определить вероятность попадания в лося.

   Решение: Вероятность обратно пропорциональна квадрату расстояния значит: $p = \frac{k}{r^2}$, где r - расстояние до лося. Для $p = 0.5$, $r = 100$: $k = 5000$. Значит $p_{150} = \frac{5000}{150^2} = \frac{2}{9}$ и $p_{200} = \frac{5000}{200^2} = \frac{1}{8}$
   Теперь найдем вероятность попасть в лося с трех попыток:

   $$P = p_{100} + q_{100}p_{150} + q_{100}q_{150}p_{200} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{9} + \frac{1}{2}\frac{7}{9}\frac{1}{8} = \frac{72+16+7}{9*16} = \frac{95}{144}$$

4. В урне находится m шаров, из которых m_1 белых и m_2 черных ($m_1 + m_2 = m$). Производится n извлечений одного шара с возвращением его (после определения его цвета) обратно в урну. Найдите вероятность того, что ровно r раз из n будет извлечен белый шар.

   Решение: В явном виде схема Бернулли. $p = \frac{m_1}{m}$ $q = \frac{m_2}{m}$

$$P = C_n^r p^r q^{n-r} = P = C_n^r \left(\frac{m_1}{m}\right)^r \left(\frac{m_2}{m}\right)^{n-r}$$

5. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не меньше трех отказов?

   Решение: Пойдем от обратного и найдем такое количество приборов, что веротноять встретить меньше трех отказов была меньше 0.1. Пусть провели n испытаний, тогда найдем вероятности, при которых произойдет 0 отказов, 1 отказ, 2 отказа. Вероятность отказа обозначим за p (успех в схеме Бернулли) $P_0 = (1-p)^n$, $P_1 = C_n^1 p(1-p)^n$, $P_2 = C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$. Получаем неравенство:

$$0.8^n + n * 0.2 * 0.8^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} * 0.2 * 0.8^{n-2} \leq 0.1$$

   Это неравенство (спасибо Wolfram) выполняется для $n \geq 25$.

6. (Задача Стефана Банаха) В двух спичечных коробках имеется по n спичек. На каждом шаге наугад выбирается коробок, и из него удаляется (используется) одна спичка. Найдите вероятность того, что в момент, когда один из коробков опустеет, в другом останется k спичек.

   Решение: Представим эксперимент как ленту с клетками. «0» будем обозначать взятие спички из одного коробка, «1» из другого. Нам нужно, чтобы одновременно произошло 2 события:

   (a) взяли последнюю спичку из одного коробка

   (b) в другом коробке осталось k спичек.

   Это значит, что в хвосте этой ленты будет k «1», а перед ними «0» (если бы нолика не было, то под наш случай подходил бы вариант "сначала забрать все спички из одного коробка но так нельзя). Итого у нас $k+1$ зарезервированных мест на ленте. А для оставшихся мы можем использовать схему бернулли.
   Всего экспериментов: $2n-k-1$, количество успехов (0-ков): $n-1$, неуспехов: $n-k$, вероятность успеха $p = \frac{1}{2}$.

$$C_{2n-k-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-k} = \frac{1}{2^{2n-k-1}} C_{2n-k-1}^{n-1}$$

Еще нужно домножить на $\frac{1}{2}$ - вероятность выпадения последнего 0-ка (так как это событие может и не произойти, а вот дальше умножать не надо, так как у нас нет выбора и мы берем оставшиеся спички из последнего коробка).
Так как нам неважно в каком из коробков спички кончились раньше, то мы можем поменять 0 на 1 и наоборот и получить еще столько же подходящих исходов. Поэтому ответ нужно умножить на 2.

Ответ:

$$\frac{1}{2^{n-k-1}} C_{2n-k-1}^{n-1}$$

7. В корзине лежит n шариков. В ходе эксперимента с равными вероятностями вытаскивают шарики из корзины и кладут обратно. Эксперимент заканчивается, когда один из шариков достали k раз. Определить вероятность того, что для этого придется производить $m < 2k$ вытаскиваний.

   Решение: Эксперимент заканчивается, когда один конкретный шарик достали k раз. Значит последний результат у нас определен и не будет учитываться в схеме Бернулли. Составим схему Бернулли для вытаскивания определенного шарика k раз: $m-1$ вытаскиваний, $k-1$ успехов, $p = \frac{1}{n}$ вероятность вытащить каждый шарик. И не забудем домножить на p - выпадение последнего успеха.

$$pC_{m-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{m-k}$$

   Нам нужно посчитать все успехи для диапазона $m < 2k$. Можем просто просуммировать эти вероятности, так как эксперименты не пересекаются, ведь последний эксперимент всегда стоит на разных позициях. Заметим, что при $m < k$ $P = 0$, нельзя получить k успехов в меньше, чем k экспериментах. Поэтому суммируем от $m = k$, до $m = 2k - 1$:

$$P = \sum_{m=k}^{2k-1} pC_{m-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{m-k} = \sum_{m=k}^{2k-1} \frac{1}{n^m} C_{m-1}^{k-1} (n-1)^{m-k}$$

   За существенное сокращение этой формулы (как минимум убрать сумму) даю 2б:)