Классическая вероятность. Схема Бернулли.

Дополнительный

1. (0.5б)Вася и Петя подбрасывают монету до тех пор пока не выпадет "орел". Если это происходит на нечетном шаге, то выигрывает Вася, если на четном, то Петя. Определить вероятность победы Васи.

   Решение: $p = \frac{1}{2}$ - вероятность «орла», $q = \frac{1}{2}$ - вероятность «решки». Эксперимент заканчивается, когда выпадает «орел». Вероятность, что Вася выкинет «орла» на $(2k+1)$-ом шаге равна: pq^{2k}. Нам нужно рассмотреть все события, в которых Вася выкидывает «орла». События независимы - можем их просуммировать:

   $$P = \sum_{k=0}^{\infty} pq^{2k} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{2}{3}$$

2. (0.5б)Из чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность p_N того, что:

   (a) число a не делится ни на a_1 ни на a_2, где a_1 и a_2 – фиксированные натуральные взаимно простые числа;

   (b) число a не делится ни на какое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где числа a_i – натуральные и попарно взаимно простые.

   Найти $\lim_{N\to\infty} p_N$ в случаях (a) и (b).

   Решение: Обозначим начальное множество чисел как M. Количество чисел, делящихся на a_i из M, равно $\left[\frac{N}{a_i}\right]$. Количество чисел, делящихся на все числа из множества $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, из M равно $\left[\frac{N}{LCM(A)}\right]$, где $LCM(A)$ - наименьшее общее кратное числел из множества A. Но $LCM(A) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$, так как все числа из A взамно просты между собой. Итого получаем

   (a) Чтобы найти вероятность того, что число a делится на a_1 или a_2, мы должны сложить количество чисел, делящихся на a_1, a_2 и вычесть количество чисел, которые делятся на оба числа, потому что мы посчитали их дважды (успехи), а потом поделить это на общее число исходов:

   $$p_a = \left(\frac{\left[\frac{N}{a_1}\right] + \left[\frac{N}{a_2}\right] - \left[\frac{N}{a_1 \cdot a_2}\right]}{N}\right)$$

   Очевидно, что $p_N = 1 - p_a$. Получаем:

   $$\lim_{N\to\infty} p_N = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\left[\frac{N}{a_1}\right]}{N} - \lim_{N\to\infty} \frac{\left[\frac{N}{a_2}\right]}{N} + \lim_{N\to\infty} \frac{\left[\frac{N}{a_1 \cdot a_2}\right]}{N}$$

Посчитаем предел:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left[\frac{N}{c}\right]}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{N}{c}+\left\{\frac{N\%c}{c}\right\}}{N}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{c}+\frac{const}{N}\right)=\frac{1}{c}$$

Использовав выражение сверху получим:

$$\lim_{N\to\infty}p_N=1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1\cdot a_2}=\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a_2}\right)$$

(b) Действуем абсолютно аналогично, только теперь, чтобы посчитать точное значение количества чисел, делящихся на $A=\{a_1,\dots,a_k\}$ нужно применить формулу включений и исключений:

$$p_N=1-\frac{\sum\limits_{A_i\in 2^A, n=|A_i|, A\neq\emptyset}(-1)^{n-1}\left[\frac{N}{LCM(A_i)}\right]}{N}=\sum_{A_i\in 2^A, n=|A_i|}\frac{(-1)^n}{LCM(A_i)}=$$

$$=\sum_{A_i\in 2^A, n=|A_i|}\frac{(-1)^n}{\prod\limits_{a_j\in A_i}a_j}=1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\ldots+\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_1\cdot a_3}\ldots=$$

$$=\prod_{a_j\in A}(1-\frac{1}{a_j})$$

3. (0.5б)Некогда шестизначный номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета считался “счастливым”, если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить “счастливый” билет.

Решение:

(a) Количество счастливых билетов равно количеству 6 значных чисел с суммой цифр 27.
Построим биекцию: $abcdef\to abc(9-d)(9-e)(9-f)$.
$a+b+c=d+e+f\Rightarrow a+b+c+(9-d)+(9-e)+(9-c)=27$

(b) Количество разбить число 27 на 6 слагаемых равно количеству способов расставить 5 перегородок среди 27-ми единичек или числу сочетаний с повторениями $\overline{C}^5_{27}=C^5_{32}$.

(c) Теперь нужно убрать такие разбиения, в которых есть слагаемое больше 9, ведь в билете присутствуют только цифры. Воспользуемся формулой включений и исключений: уберем все разбиения, где есть хотя бы одно слагаемое больше 10, а потом добавим дважды убранные разбиения с двумя слагаемыми больше 10.

i. Пусть одно слагаемое больше 10. Чтобы посчитать такие исходы разобьем 17 на 6, а потом к любому из них добавим 10. Получим: $6\cdot C^5_{17+5}$.

ii. Пусть 2 слагаемых больше 10, тогда разобьем число 7 на 6 слагаемых и потом увеличим любые 2 слагаемых на 10. Получим: $\frac{2}{6} \cdot C_{7+5}^5$.

Итого получили количество «счастливых» билетов:

$$C_{32}^5 - 6 \cdot C_{17+5}^5 + \tfrac{2}{6} \cdot C_{7+5}^5 = 55252$$

Чтобы получить вероятность, поделим на все возможные исходы:

$$\frac{C_{32}^5 - 6 \cdot C_{17+5}^5 + \frac{2}{6} \cdot C_{7+5}^5}{10^6}$$

4. (0.5б)Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечивалось появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

   Решение: Так как нас интересует лишь последняя цифра, то вместо чисел будем тянуть цифры от 0 до 9 с вероятностью $p = \frac{1}{10}$. Пусть мы взяли n цифр, тогда количество способов выбрать среди них ровно 3 семерки - это $C_n^3 p^3 q^{n-3}$ по схеме Бернулли. Действительно, мы указываем 3 позиции цифр 7, а на остальных позициях стоят любые цифры, кроме 7. Подставляя числа получаем:

   $$\frac{1}{10^n} C_n^3 9^{n-3}$$

   Найдем максимум этой функции по целым числам с помощью фолфрама/питона. Он достигается при $n = 29$ и $n = 30$.

5. (0.5б)Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех независимых выстрелах из спортивного пистолета по мишени с максимальным числом очков, равным 10, если вероятность получения 30 очков равна 0,008. Известно, что при одном выстреле вероятность получения восьми очков равна 0,15, а менее восьми очков – 0,4.

   Решение: p_{10}, p_9, p_8 вероятность получить соответственно 10, 9, 8 очков за выстрел. Известно, что $p_{10}^3 = 0,008$. Тогда $p_{10} = 0,2$. $p_8 = 0.15$. $p_{8>} = 0.4$. Тогда $p_9 = 1 - 0.2 - 0.15 - 0.4 = 0.25$. Рассмотрим варианты получения 28 и более очков:

   (a) $30 = 10 + 10 + 10$
   (b) $29 = 10 + 10 + 9$
   (c) $28 = 10 + 9 + 9 = 10 + 10 + 8$

   Случаи независимые, посчитаем для них схемы Бернулли и сложим:

   $$p_{10}^3 + C_3^1(p_{10}^2 \cdot p_9 + p_9^2 \cdot p_{10} + p_{10}^2 \cdot p_8) = 0.0935$$

6. (0.5б)Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три «герба».

   Решение:Пусть $p = \frac{1}{2}$ - вероятность выпадения герба. Вероятность успеха в одном испытании - это p^3. Найдем вероятность того, что ни в одном испытании не выпало 3 герба. Это $q = (1-p^3)^{20}$. Тогда искомая вероятность $P = 1 - q = 1 - (1-p^3)^{20}$.

7. (0.5б)Квантовый вычислитель выходит из строя, если перегреваются не менее пяти кубитов I типа или не менее двух кубитов II типа. Определить вероятность выхода из строя вычислителя, если известно, что перегрелось пять кубитов, причем кубиты перегреваются независимо один от другого. Каждый перегревшийся кубит с вероятностью 0,7 является кубитом первого типа и с вероятностью 0,3 – второго типа.

   Решение: Возможные варианты перегрева:

   (a) 5 кубитов 1го типа

   (b) 2 кубита 2го типа и 3 первого

   (c) 3 кубита 2го типа и 2 первого

   (d) 4 кубита 2го типа и 1 первого

   (e) 5 кубита 2го типа

   $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.3$ Распишем для всех случаев схемы Бернулли и сложим их:

$$\left(\sum_{i=0}^{5} C_5^i p_1^i p_2^{5-i}\right) - C_5^4 p_1^4 p_2 = 1 - 5 * 0.7^4 * 0.3$$