5. Марковские цепи. База

1. Изобразить в виде графа марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей P.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу перехода по 2м шагам по марковской цепи из 1 задачи и нарисовать для нее марковскую цепь.

3. Пусть у нас есть агент, который движется по марковской цепи. $\omega_i \in X$(где X - вершины графа марковской цепи, состояния) - местоположение агента в марковской цепи. $\omega = (\omega_0, \omega_1 \ldots \omega_i \ldots)$ - траектория движения агента.
   Для Марковской цепи P из 1 задачи и равномерного распределения вероятности $\mu = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ найти вероятности:

   (a) $P(\omega_0 = x_2)$
   (b) $P(\omega_2 = x_2, \omega_1 = x_2, \omega_0 = x_1)$
   (c) $P(\omega_1 = x_2 | \omega_0 = x_1)$
   (d) $P(\omega_3 = x_3 | \omega_1 = x_1)$
   (e) $P(\omega_3 = x_3 | \omega_0 = x_1, \omega_1 = x_2)$
   (f) $P(\omega_5 = x_3 | \omega_6 = x_1)$
   (g) $P(\omega_3 = x_3 | \omega_0 = x_1, \omega_4 = x_2)$
   (h) $P(\omega_n = x_3 | \omega_0 = x_1, \omega_{2n} = x_1)$
   (i) $P(\omega_4 = x_3, \omega_3 = x_2 | \omega_2 = x_1, \omega_5 = x_1)$

4. Используя понятие марковской цепи покажите, что $\forall P, Q$ - стохастических матриц PQ - также является стохастической.

5. Марковские цепи. Домашки

1. Для пресловутой марковской цепи из 1 задачи из базы найти:

   (a) $(0.2)P(\omega_2 = x_4)$

   (b) $(0.2)P(\omega_{2n} = x_3|\omega_n = x_1)$

   (c) $(0.2)P(\omega_2 = x_4|\omega_3 = x_3)$

   (d) $(0.2)P(\omega_3 = x_3|\omega_4 = x_1, \omega_5 = x_2)$

   (e) $(0.2)P(\omega_5 = x_2, \omega_3 = x_2|\omega_2 = x_1, \omega_3 = x_1, \omega_6 = x_1)$

2. (1б)Рассмотрим цепь с 3 состояниями и матрицей

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Найдите распределение вероятности состояний в момент времени 123, если в начальный момент времени распределение вероятностей:

   (a) $(1/3, 1/3, 1/3)$

   (b) $(1, 0, 0)$

   (c) (a, b, c)

3. (1б)Лена часто ходит по магазинам. У неё есть k скидочных карт из разных магазинов. Девушка хранит их в кошельке в виде стопки карт. После использования, $i-$я карта перемещается на верхушку стопки. Будем считать, что в каждый рассматриваемый момент времени i Лена идёт в $i-$й магазин с вероятностью p_i, не зависящей от того, в каких магазинах она была до этого, и в каком порядке их обходила. Определите вероятности того, что спустя долгое время, карта с номером i будет лежать на вершине стопки.

4. (2б) Рассмотрим цепь с 3 состояниями и матрицей

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

   Начальное распределение: $(1, 0, 0)$. Найдите a такое, что вероятность оказаться в состоянии 2 на шаге 998244353 максимальна. Если таких a несколько, выберите любое.